

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Publication fondée en 1842 par Gerono et Terquem,
et continuée par Prouhet, Bourget, Brisse, Rouché, Antomari et Duporcq.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME VI.

(LXV[e] VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[R9a]

THÉORIE ET APPLICATIONS DU COIN;

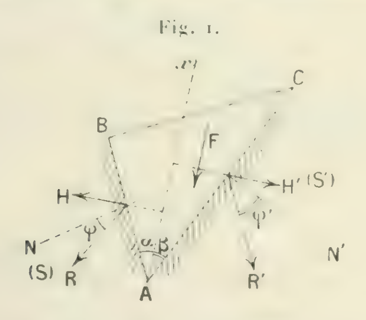
PAR M. CH. HALPHEN.

---

§ I. — FORMULES RELATIVES AU COIN.

Le coin est un prisme droit solide, à section triangulaire ABC (*fig.* 1), dont les faces AB et AC sont

Fig. 1.



engagées entre deux corps solides, et sur lequel agit une force F. Soit Ax la parallèle à F menée par A: α l'angle $\widehat{BAx}$ et β l'angle $\widehat{CAx}$.

Supposons le coin en équilibre limite, c'est-à-dire en équilibre, mais sur le point de se mettre en mouve-

ment dans la direction de la force F. Les solides S et S' exercent sur les faces AB et AC des réactions, obliques à cause du frottement ; ces réactions ont des résultantes, et les forces R, R', égales et directement opposées à ces résultantes, sont les actions du coin sur S et S' ; donc, R et R' forment un système de forces équivalent à F, ce qu'on peut exprimer par deux équations, obtenues en projetant sur Ax et sur la direction perpendiculaire à Ax.

Soit φ l'angle de R avec la normale à AB, et φ' l'angle de R' avec la normale à AC ; comme il y a équilibre limite, φ et φ' sont les angles de frottement du coin sur S et S' ; nous aurons

$$F = R\sin(\varphi + \alpha) + R'\sin(\varphi' + \beta),$$

$$R\cos(\varphi + \alpha) = R'\cos(\varphi' + \beta).$$

Ce sont deux équations du premier degré en R et R', dont on tire

$$R = \frac{F\cos(\varphi' + \beta)}{\sin(\varphi + \alpha)\cos(\varphi' + \beta) + \sin(\varphi' + \beta)\cos(\varphi + \alpha)}$$

$$= \frac{F\cos(\varphi' + \beta)}{\sin(\varphi + \varphi' + \alpha + \beta)}$$

et

$$R' = \frac{F\cos(\varphi + \alpha)}{\sin(\varphi + \varphi' + \alpha + \beta)}.$$

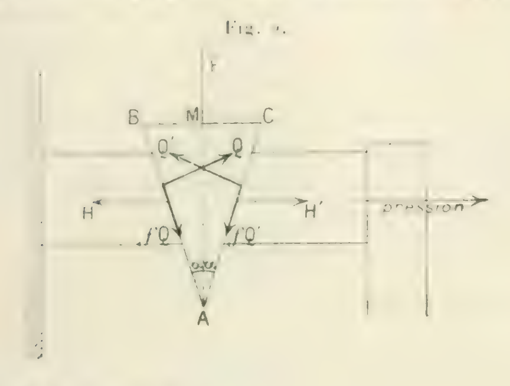
En outre, les composantes H et H' des pressions suivant la direction perpendiculaire à Ax ont la même valeur, comme il résulte des équations

$$H = R\cos(\varphi + \alpha) = \frac{F\cos(\varphi + \alpha)\cos(\varphi' + \beta)}{\sin(\varphi + \varphi' + \alpha + \beta)},$$

$$H' = R'\cos(\varphi' + \beta) = \frac{F\cos(\varphi + \alpha)\cos(\varphi' + \beta)}{\sin(\varphi + \varphi' + \alpha + \beta)}.$$

Cas particulier. — Si le coin a pour section un triangle isoscèle (*fig.* 2), et si la force F est appliquée

Fig. 2.



suivant la hauteur, on a

$$\alpha = \beta.$$

Si en outre on suppose $\varphi = \varphi'$, on voit que

$$H = \frac{F\cos^2(\varphi - \alpha)}{\sin 2(\varphi + \alpha)} = \frac{F\cos^2(\varphi - \alpha)}{2\sin(\varphi + \alpha)\cos(\varphi - \alpha)},$$

$$H = \frac{F}{2\,\mathrm{tang}(\alpha - \varphi)};$$

si l'on supposait le frottement nul, on aurait

$$H_1 = \frac{F}{2\,\mathrm{tang}\,\alpha},$$

valeur sensiblement inférieure à H.

Exemple. — Pour $F = 20^{kg}$, $\alpha = 5^{\circ}$, on a

$$H_1 = 115^{kg};$$

mais, si l'on prend $f = \mathrm{tang}\,\varphi = 0,30$, soit $\varphi = 17^{\circ}$ (frottement de bois dur sur bois), on n'a en réalité que

$$H = 24^{kg},7.$$

Dans ce cas particulier, supposons que le coin ait été enfoncé entre deux solides en les écartant; si F cesse d'agir, les solides vont, par suite de leur élasticité naturelle, chercher à se rapprocher, en exerçant sur le coin des efforts, tendant à le faire sauter. Les forces en jeu seront donc les efforts normaux Q, et les forces de frottement fQ, dont les composantes suivant la direction AM tendent respectivement à faire sauter le coin, et à le maintenir en place.

Le coin restera en équilibre, si

$$fQ\cos\alpha > Q\sin\alpha \quad \text{ou} \quad f > \operatorname{tang}\alpha \quad \text{ou} \quad \varphi > \alpha.$$

On dit alors qu'il y a *arc-boutement* ou *coïncement* : le coin ne sautera que si l'on exerce sur lui une force de bas en haut.

Si, au contraire,

$$fQ\cos\alpha < Q\sin\alpha \quad \text{ou} \quad \varphi < \alpha,$$

l'équilibre n'aura pas lieu, le coin sautera.

§ II. — Applications pratiques.

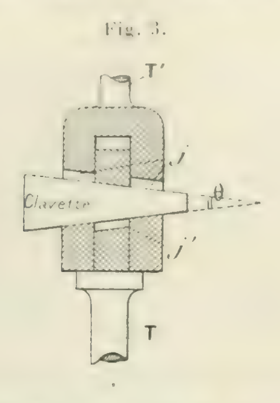
Le coin sert, en premier lieu, à exercer des pressions, comme l'indique la théorie, en prenant par exemple la disposition indiquée sur la figure 2, le solide de gauche étant buté sur un mur fixe. Bien souvent, après que l'on a obtenu la pression voulue, c'est-à-dire réalisé un serrage, l'ensemble reste en équilibre par coïncement : il est calé.

Les outils nommés *hache* et *tranche* agissent comme coins vis-à-vis des bois et métaux; par des pressions, ils séparent la matière en deux après l'avoir fendue.

Les *clavettes* sont des coins que l'on emploie, dans les constructions mécaniques, pour assembler avec

serrage deux pièces. Supposons, par exemple, qu'on veuille relier deux tiges T et T' (*fig.* 3); on munira T

Fig. 3.



d'une portion plane, percée d'un trou rectangulaire, et T' d'une fourche percée également; dans ces ouvertures on enfoncera une clavette. Il faut avoir soin de ménager en j et j' des jeux, en taillant les ouvertures en conséquence, afin de pouvoir, en cas d'usure, enfoncer la clavette pour revenir au serrage primitif (*rattraper le jeu*).

Dans les clavettes, on observe toujours la règle nécessaire pour qu'il y ait coïncement: c'est-à-dire $\alpha < \varphi$; ou, θ étant l'angle de la clavette, $\theta < 2\varphi$. La tangente de θ s'appelle *tirage* de la clavette; donc le tirage doit être inférieur au double du coefficient de frottement. Pour des clavettes souvent démontées, le tirage est de 0,10 à 0,05; pour des clavettes fixes, il est de 0,02 en moyenne.

Parmi les nombreuses applications de serrage par clavette, on peut citer le calage d'une poulie sur un arbre : la clavette étant enfoncée entre le moyeu de la poulie et l'arbre qui porte à cet effet une rainure. Mais, lorsque le clavetage est appliqué à un organe de ma-

chine à mouvements non réguliers, ou soumis à de fortes trépidations, sous l'influence des diverses forces qui en résultent, le coincement peut cesser; pour empêcher les disjonctions d'organes qui se produiraient alors, on a imaginé des dispositifs de sûreté maintenant les clavettes en place. On peut voir différents types de ces dispositifs dans les clavettes des têtes de bielle des machines à vapeur, locomotives, etc., ils sont mentionnés dans les ouvrages spéciaux.

§ III. — Application de la théorie du coin aux murs de soutènement.

Soit un *mur de soutènement* dont AB est le parement intérieur. La terre exerce sur ce mur une poussée, et, si l'on suppose qu'il vienne à se rompre, on constate que la masse de terre qu'il devait retenir s'est fendue suivant une surface AC, sensiblement plane, dite *plan de rupture*. Dès lors, on peut envisager la poussée de la terre sur le mur, comme celle d'un coin ABC, auquel est appliqué son poids F (*fig.* 4). En supposant que le parement AB soit vertical, c'est-à-dire $\alpha = 0$, φ étant l'angle de frottement de la terre sur la maçonnerie, et φ' l'angle de frottement de la terre sur la terre, on aura

$$R = \frac{F\cos(\varphi' - \beta)}{\sin(\varphi + \varphi' + \beta)}.$$

C'est la poussée totale sur le mur.

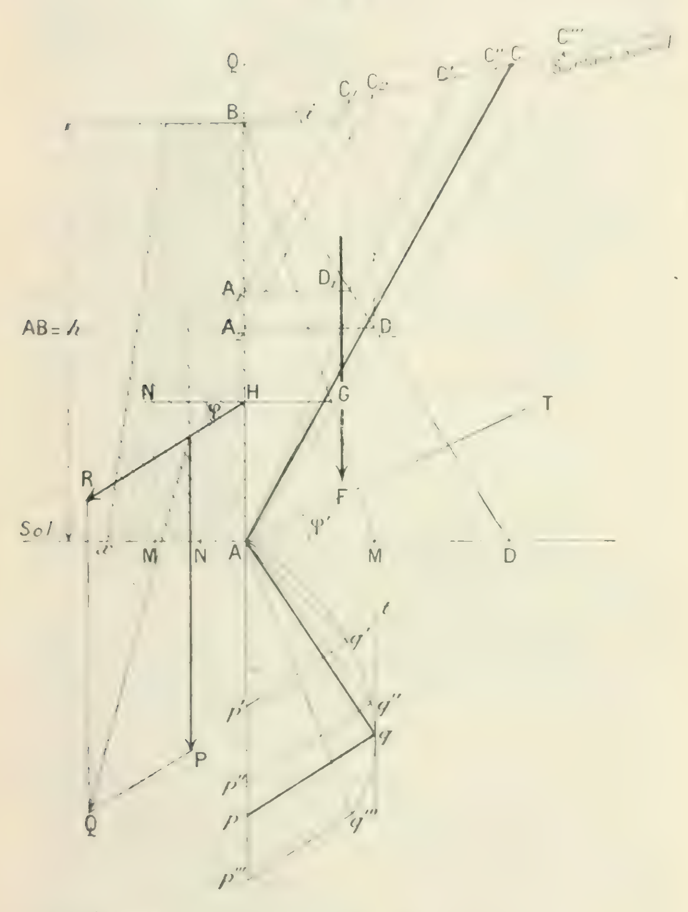
Évaluons F en supposant que 1^m soit la longueur du mur, δ la densité de la terre, et i l'inclinaison sur l'horizontale du talus BC. Comme $\widehat{BCA} = 90^\circ - (i + \beta)$, on a

$$\frac{AB}{\cos(i + \beta)} = \frac{BC}{\sin\beta}.$$

La hauteur CQ du triangle ABC est donc

$$CQ = BC \cos i = \frac{h \sin \beta \cos i}{\cos(i + \beta)},$$

Fig. 1.



et par suite

$$F = \text{surf. ABC} \times 1^{m} \times \delta = \frac{\delta h^2 \sin \beta \cos i}{2 \cos(i + \beta)}.$$

Donc

$$R = \frac{\delta h^2 \sin\beta \cos i \cos(\varphi - \beta)}{2 \cos(i - \beta) \sin(\varphi - \varphi' + \beta)}.$$

Mais β est inconnu. Afin d'avoir un mur suffisamment solide, on suppose que le plan de rupture AC est celui qui donne la poussée R maximum. R étant fonction de β, il suffit d'égaler à zéro la dérivée $\frac{dR}{d\beta}$; on a ainsi une équation en β donnant la valeur de cet angle pour le cas le plus défavorable.

On a remarqué que la valeur de β ainsi obtenue est généralement voisine de $\left(45^\circ - \frac{\varphi'}{2}\right)$, d'où le tracé pratique suivant : on mène l'horizontale de A, à partir de laquelle on prend l'angle φ', en $\widehat{DAT}$, la bissectrice AC de l'angle BAT est la trace du plan de rupture cherché. Poncelet a donné un procédé graphique pour chercher le prisme de poussée maximum, en s'appuyant sur ce principe bien connu : trois forces en équilibre (ici, ces forces sont F, — R et — R') peuvent être représentées par les trois côtés d'un triangle formé de vecteurs équipollents à ces forces.

Menons des droites AC', AC'', AC''', ...; et prenons sur la verticale du point A une longueur Ap', proportionnelle au poids du prisme ABC'; puis menons la droite Aq', faisant avec AC' un angle $\widehat{C'Aq'} = 90^\circ - \varphi'$, et enfin $p'q'$ parallèle à la direction connue de R. Ces deux dernières droites se coupent en q', et l'on voit que le triangle $Ap'q'$ a bien des côtés équipollents à F, — R et — R'. Traçons de même $Ap''q''$, $Ap'''q'''$, ..., correspondant à AC'', AC''', ..., et joignons les points q', q'', q''', ... par une courbe continue. Si l'on mène une tangente qt à cette courbe, parallèlement à AB, la poussée $\overline{qp}$ correspon-

dant au point q de contact est la poussée maximum; et la longueur du vecteur $\overline{qp}$ représente cette poussée à l'échelle de la figure; le plan cherché AC est donc celui qui fait avec la droite Aq un angle qAC $= 90° - \varphi'$. Ce procédé est, lui aussi, approximatif, car le point q n'est pas déterminé d'une façon précise; mais il suffit pour la pratique.

Cherchons le point d'application de la poussée R sur le parement AB du mur; c'est le *centre de poussée*. Pour cela, considérons un point A_1 entre A et B; sur la fraction de mur BA_1, la poussée est, par similitude, celle qu'exerce le coin BA_1C_1, A_1C_1 étant parallèle à AC; et cette poussée maximum est proportionnelle à la surface A_1BC_1. De même, sur A_2B, la poussée est proportionnelle à A_2BC_2; donc, sur l'élément A_1A_2 que nous supposerons très petit, la poussée est proportionnelle à $A_1A_2C_1C_2$, ou bien à $A_1A_2D_1D_2$, les points D_1 et D_2 étant, sur les perpendiculaires en A_1 et A_2 à AB, à des distances de cette droite égales à celles de C_1 et C_2. On voit que les points D_1, D_2, ... sont sur une droite, passant par B; et, par suite, la poussée totale sur AB, résultante de toutes les poussées élémentaires sur les éléments A_1A_2, est appliquée au point H, projection sur AB du centre de gravité du triangle ABD, d'après un théorème bien connu; c'est-à-dire que la poussée R est appliquée au tiers de AB à partir de A.

Après avoir calculé, ou construit graphiquement la poussée R, et l'avoir appliquée au centre de poussée, on compose cette force avec le poids P du mur. Pour que ce mur soit en équilibre, en supposant qu'il soit un solide rigide et homogène, on sait que cette résultante ρ doit passer dans le polygone d'appui, c'est-à-dire

dans la base xA ; mais, pour que la stabilité du mur soit parfaite, il est préférable, d'après la *résistance des matériaux*, que ρ passe dans le tiers moyen MN de la base. En outre, l'angle de ρ avec P doit évidemment être inférieur à l'angle de frottement φ de la maçonnerie sur le sol. En divisant la pression sur la base, ρ, par la surface de la base, on obtient approximativement la pression sur le sol par unité de surface (centimètre carré par exemple) ; cette pression ne doit pas dépasser une certaine limite pour que le sol résiste sans s'écraser ; et la condition de cette limite fixe donc la largeur de la base à adopter pour le mur. Quant à la composante H horizontale de la poussée, elle tend à trancher le mur, et fixe l'épaisseur à adopter pour le mur, pour qu'il n'y ait pas rupture par *cisaillement*.

[R1c]

NOTE RELATIVE AU MOUVEMENT DE ROTATION;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

La Géométrie analytique permet de trouver ce que deviennent les coordonnées d'un point donné M d'un solide après que celui-ci a tourné d'un angle θ autour d'un axe fixe ; mais on peut aussi résoudre le problème au moyen d'une intégration dont la simplicité mérite peut-être d'être signalée.

On peut supposer que l'axe de rotation passe par l'origine des coordonnées rectangulaires ; soient a, b, c ses cosinus directeurs, x_0, y_0, z_0 les coordonnées de M avant la rotation. L'expression classique des compo-

santes de la vitesse due à une rotation montre immédiatement que les coordonnées du point M sont liées à l'angle θ dont le solide a tourné par les équations simultanées

$$(1)\qquad \frac{dx}{d\theta} = bz - cy, \qquad \frac{dy}{d\theta} = cx - az, \qquad \frac{dz}{d\theta} = ay - bx.$$

Pour intégrer ce système, différentions la première des équations et ayons égard aux deux autres ainsi qu'à la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$: il vient

$$(2)\qquad \frac{d^2x}{d\theta^2} = a(ax + by + cz) - x;$$

une nouvelle dérivation donne, après réduction,

$$\frac{d^3x}{d\theta^3} = -\frac{dx}{d\theta}.$$

L'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$x = A + B\sin\theta + C(1 - \cos\theta);$$

on reconnaît aisément que les constantes A, B, C sont respectivement égales aux valeurs de x, $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{d^2x}{d\theta^2}$, pour $\theta = 0$; la première est x_0, les deux autres sont fournies par la première équation (1) et par l'équation (2), et l'on a, pour la valeur demandée de x,

$$x = x_0\cos\theta + (bz_0 - cy_0)\sin\theta$$
$$+ a(ax_0 + by_0 + cz_0)(1 - \cos\theta).$$

Les expressions de y et z s'en déduisent par de simples permutations.

[K9b]

SUR LE THÉORÈME DE PTOLÉMÉE ET SON APPLICATION AUX POLYGONES RÉGULIERS;

PAR M. J. JUHEL-RÉNOY.

Il est d'usage, dans les Cours de Géométrie, d'appliquer le théorème de Ptolémée à la seule inscription des pentédécagones réguliers. Le but de cette Note est d'en faire l'application aux polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés, en particulier aux décagones et pentagones, et d'en déduire l'équation générale dont dépend l'inscription des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés.

I. Nous commencerons par donner, du théorème de Ptolémée, une démonstration qui se déduit immédiatement de la définition du rapport anharmonique.

Soient ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle et M un point de ce cercle. On a la relation

$$(M.BACD) + (M.BCAD) = 1.$$

Or, en grandeur et en signe,

$$(M.BACD) = \frac{\sin CMB}{\sin CMA} : \frac{\sin DMB}{\sin DMA} = \frac{CB}{CA} : \frac{DB}{DA},$$

$$(M.BCAD) = \frac{\sin AMB}{\sin AMC} : \frac{\sin DMB}{\sin DMC} = \frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC}$$

et, par suite,

$$CB.DA + AB.DC = AC.BD.$$

II. Supposons la circonférence divisée en m parties égales et soient, dans le quadrilatère ABCD,

$n-p$	le nombre des divisions	sous-tendues	par	AB.
p	»	»	»	BC.
p	»	»	»	CD.
$n+p$	»	»	»	DA.

Le théorème de Ptolémée donne la formule

$$(1) \qquad C_m^{n+p} + C_m^{n-p} = \frac{C_m^{2p}}{C_m^{p}} C_m^{n}.$$

La circonférence étant toujours divisée en m parties égales, supposons que les côtés du quadrilatère ABCD sous-tendent

AB	n	divisions
BC..................	p	»
CD	$n-p$	»
DA	$2n$	»

Le théorème de Ptolémée donne la formule

$$(2) \qquad C_m^{n+p} - C_m^{n-p} = \frac{C_m^{2n}}{C_m^{n}} C_m^{p}.$$

Enfin, dans une troisième hypothèse, représentons par

p	le nombre des divisions	sous-tendues	par	AB,
$n-p$	»	»	»	BC.
n	»	»	»	CD.
$n+p$	»	»	»	DA.

Le théorème de Ptolémée donne la formule

$$(3) \qquad C_m^{n+p} C_m^{n-p} = (C_m^{n})^2 - (C_m^{p})^2.$$

III. Appliquons ces formules à la division de la circonférence en dix parties égales; la formule (1) donne.

pour $n = 5$ et $p = 1$,

$$C_{10}^1 = \frac{C_5^1}{C_5^2} R,$$

puis, pour $n = 5$ et $p = 2$,

$$C_{10}^3 = \frac{C_5^2}{C_5^1} R,$$

d'où, par multiplication,

$$C_{10}^1 \, C_{10}^3 = R^2.$$

Dans la formule (2), faisons $n = 2$ et $p = 1$,

$$C_{10}^3 - C_{10}^1 = \frac{C_5^2}{C_5^1} C_{10}^1 = R.$$

Ce sont les formules de l'inscription des décagones.

Quant aux pentagones, remplaçons, dans la formule (3), n par 2 et p par 1,

$$(C_5^1)^2 - (C_{10}^1)^2 = C_{10}^1 . C_{10}^3 = R^2,$$

puis n par 4 et p par 3,

$$(C_5^2)^2 - (C_{10}^3)^2 = C_{10}^1 . C_{10}^3 = R^2.$$

On déduit de ces formules la construction bien connue que voici :

Soient AC et BD deux diamètres rectangulaires d'un cercle de centre O ; de I milieu de AO, avec IB comme rayon, on trace une circonférence qui coupe AC en E et G, on a

$$OE = C_{10}^1, \qquad OG = C_{10}^3,$$
$$EB = C_5^1, \qquad GB = C_5^2.$$

Remarquons, en passant, la formule

$$(C_5^1)^2 - (C_{10}^1)^2 = (C_6^1)^2.$$

IV. Supposons, d'une manière générale, la circonférence divisée en $2m$ parties égales et représentons par x le rapport $\frac{C_2}{C_1}$, en désignant, pour simplifier les notations, par C_K la longueur de la corde qui sous-tend K divisions. L'application de la relation (1) donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
C_2 &= xC_1,\\
C_3 + C_1 &= xC_2,\\
C_4 + C_2 &= xC_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
C_{m-1} + C_{m-3} &= xC_{m-2},\\
2R + C_{m-2} &= xC_{m-1},\\
C_{m-1} &= Rx,\\
C_m &= 2R;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
C_m &= 2R,\\
C_{m-1} &= Rx,\\
C_{m-2} &= (x^2 - 2)R,\\
C_{m-3} &= (x^3 - 3x)R,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On voit, d'une manière générale, qu'en posant $C_K = RV_{m-K}$, trois polynomes V consécutifs satisfont, d'après ce qui précède, à la loi de récurrence

$$V_K + V_{K-2} = xV_{K-1}$$

avec les conditions $V_0 = 2$ et $V_1 = x$.

Or on a

$$C_2 = RV_{m-2} \quad \text{et} \quad C_1 = RV_{m-1},$$
$$C_2 = xC_1$$

et, par suite,

$$V_{m-2} - xV_{m-1} = 0;$$

d'où l'on déduit

$$V_m = 0.$$

Telle est l'équation qui donne la solution du problème de la division de la circonférence en $2m$ parties égales.

Or on sait que les fonctions V jouissent de toutes les propriétés des fonctions de Sturm, qu'elles ont en particulier toutes leurs racines réelles et que l'équation $V_m = 0$ a une racine et une seule comprise entre la plus grande racine de $V_{m-1} = 0$ et $+\infty$. Il s'agit de démontrer que, pour chaque équation $V_m = 0$, la plus grande racine seule convient à la solution du problème.

Cela résulte immédiatement de ce que, d'après la valeur de

$$x = \frac{1}{R} C_{2m}^{m-1} = \frac{1}{R}\sqrt{4R^2 - (C_{2m}^{1})^2},$$

x croît avec m et que, pour l'équation $V_2 = 0$ en particulier, c'est la plus grande racine qui convient.

V. On sait que les fonctions V ont toutes leurs racines comprises entre $+2$ et -2. D'après la forme même des fonctions V, dont tous les termes sont de même parité, il suffit que la plus grande racine de la fonction V_m soit inférieure à 2, et ceci est une conséquence de la relation

$$C_{2m}^{m-1} = Rx.$$

Il est même possible d'obtenir, pour la plus grande racine de la fonction V_m, une limite supérieure plus rapprochée que 2.

On démontre, en effet, facilement que la fonction V_m satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(x^2 - 4)V''_m + xV'_m - m^2 V_m = 0.$$

Or, Laguerre a démontré dans une Note : *Sur les équations algébriques dont le premier membre satisfait à une équation linéaire du second ordre*, qu'étant donné un polynome y ayant toutes ses racines réelles et satisfaisant à l'équation différentielle

$$Py'' + Qy' + Ry = 0,$$

le polynome

$$\Omega = PR + PQ' - QP' - \frac{m-2}{4(m-1)} Q^2,$$

où m désigne le degré du polynome y, a une valeur positive ou nulle quand on y remplace x par une racine quelconque du polynome y.

On a donc, dans le cas actuel, pour toute racine x de la fonction V_m,

$$x^2 < \frac{16(m-1)^2(m-1)}{(2m-1)(2m^2-m+2)},$$

$$x < 4(m-1)\sqrt{\frac{m-1}{(2m-1)(2m^2-m+2)}},$$

$$C_{2m}^{m-1} < 4R(m-1)\sqrt{\frac{m-1}{(2m-1)(2m^2-m+2)}}.$$

Signalons enfin la propriété suivante de la fonction V_m :

Si U_{m-1} représente le résultat de la substitution de la plus grande racine de V_m dans V_{m-1}, on a, pour $m = \infty$,

$$\lim(m U_{m-1}) = \pi.$$

[P3b]

AU SUJET D'UN THÉORÈME CONNU;

Par M. M. FOUCHÉ.

Le théorème dont il s'agit est le suivant :

L'inversion conserve les lignes de courbure des surfaces.

De toutes les démonstrations qu'on en a données, aucune ne me paraît aussi simple que la suivante :

1° Le théorème est vrai s'il s'agit d'une surface développable, puisque au lieu d'une enveloppe de plans, on a une enveloppe de sphères dont les caractéristiques, qui sont les transformées des génératrices de la surface développable, sont évidemment des lignes de courbure. Quant à la seconde famille elle se conserve également à cause de la conservation des angles droits.

2° Cela posé, je considère une ligne de courbure (C) d'une surface quelconque et la développable enveloppée par les plans tangents à cette surface aux différents points (C). (C) est aussi une ligne de courbure de cette développable puisque les normales sont les mêmes dans la développable et la surface donnée, en tous les points de (C). Par l'inversion les deux surfaces circonscrites se transforment en deux autres également circonscrites. La transformée (C') de (C) est ligne de courbure sur l'enveloppe de sphères qui est la transformée de la développable : donc elle l'est aussi sur l'autre surface.

C. Q. F. D.

[P3b]

NOTE AU SUJET DE L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

Par M. R. B.

L'élégante démonstration de M. Fouché est notablement plus simple que celle que j'ai donnée dans ce Journal (1903, p. 16). Mais elle ne met pas en évidence, plus que cette dernière, le fait que *les centres de courbure principaux, en deux points correspondants de deux surfaces inverses, sont deux à deux alignés avec le pôle d'inversion*. La démonstration suivante (dont, bien entendu, je ne garantis pas l'originalité, étant donné qu'il s'agit d'une proposition tout à fait classique) établit ce fait en même temps que le théorème relatif à la conservation des lignes de courbure.

Soient m un point d'une surface (S), (Σ) une sphère tangente à (S) en m. (S) et (Σ) se coupent suivant une courbe C présentant un point double en m, et les tangentes en ce point sont les diamètres communs aux indicatrices, construites avec le même paramètre, des deux surfaces. Pour que le contact soit *stationnaire*, c'est-à-dire pour que le point double de C soit un point de rebroussement, il faut et il suffit que les deux indicatrices soient bitangentes : *cela exige que* (Σ) *ait son centre en l'un des centres de courbure principaux de* (S) *en* m. On voit aussi que la tangente à C, en ce point de rebroussement, est une direction principale de (S).

Cela posé, une sphère et une surface, ayant entre elles un contact stationnaire, se transforment par in-

version en une sphère et une surface à contact stationnaire. Cette remarque, jointe à celle que les centres de deux sphères inverses sont en ligne droite avec le pôle d'inversion, rend intuitives les propriétés de l'inversion, relatives aux lignes de courbure et aux centres de courbure principaux des surfaces.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1905;

PAR M. A. VACQUANT.

1° *On donne les deux droites* D, D' *définies respectivement par les équations*

(D) $\qquad y = 0, \qquad z = h,$

(D') $\qquad x = 0, \qquad z = -h,$

les axes de coordonnées ox, oy, oz *étant supposés rectangulaires. Trouver l'équation ponctuelle de la surface* S *lieu du sommet d'un paraboloïde variable qui passe par ces deux droites. Trouver l'équation tangentielle de la même surface.*

2° *Calculer les coordonnées d'un point quelconque* M *de la surface* S *en fonction de l'abscisse* α *et de l'ordonnée* β *des deux points* N, N' *où une droite, menée par* M, *rencontre respectivement* D *et* D'. *Soit* P *le point de coordonnées* α, β *dans le plan* xoy. *Lieu du point* M *quand* P *décrit une droite quelconque du plan* xoy. *Étude de l'intersection de la surface* S *avec une quadrique quelconque qui passe par* D *et* D'. *Lieu correspondant du point* P. *Cas où cette intersection se décompose.*

3° *Démontrer que la surface S est sa propre polaire réciproque par rapport à une infinité de quadriques Q, dont on cherchera l'équation générale ponctuelle. On envisagera plus particulièrement parmi elles les paraboloïdes Q_1. Trouver l'enveloppe des quadriques Q.*

I. Les deux droites D, D' définies respectivement par les équations

(D) $$y = 0, \qquad z = h,$$

(D') $$x = 0, \qquad z = -h$$

seront rencontrées par une droite ayant pour équations

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

si l'on a

$$bh + q = 0, \qquad -ah + p = 0$$

et, par suite,

(G) $$x = a(z + h), \qquad y = b(z - h)$$

sont les équations d'une droite G rencontrant D et D' en des points N et N' ayant respectivement pour abscisse et pour ordonnée

$$\alpha = 2ah, \qquad \beta = -2bh.$$

Pour que G reste parallèle au plan

$$Ax + By + Cz = 0,$$

il faut

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Le paraboloïde engendré par G a pour équation

$$\frac{Ax}{z + h} + \frac{By}{z - h} + C = 0$$

ou

$$Ax(z - h) + By(z + h) + C(z - h)(z + h) = 0$$

ou

$$(\varpi) \qquad Cz^2 + Axz + Byz - Ahx - Bhy - Ch^2 = 0.$$

Ce paraboloïde ayant pour plans directeurs

$$z = 0, \qquad Ax + By + Cz = 0,$$

la direction de son axe a pour équations

$$\frac{x}{B} = \frac{y}{-A} = \frac{z}{0}.$$

Le point $M(x, y, z)$ sera le sommet de ϖ si le plan tangent en M est perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{A(z-h)}{B} = \frac{B(z-h)}{-A} = \frac{Ax + By + 2Cz}{0}.$$

Les coordonnées du sommet M de ϖ sont donc définies par les équations

$$A^2(z-h) + B^2(z-h) = 0, \qquad Ax + By + 2Cz = 0,$$
$$Ax(z-h) + By(z-h) + C(z-h)(z+h) = 0.$$

En éliminant C entre les deux dernières équations, on obtient l'équation

$$Ax(z-h)(z+h-2z) + By(z-h)(z+h-2z) = 0$$

ou

$$Ax(z-h)^2 + By(z-h)^2 = 0.$$

En éliminant A et B entre cette équation et la première des trois précédentes on a l'équation ponctuelle du lieu de M :

$$y^2(z-h)^2(z-h) + x^2(z-h)^2(z+h) = 0.$$

Après suppression du facteur $(z-h)(z+h)$ qui donne l'ensemble des deux plans parallèles à xoy

menés par D et D', on obtient une surface S ayant pour équation ponctuelle

$$\text{(S)} \qquad y^2(z+h)^3 + x^2(z-h)^3 = 0$$

ou

$$x^2(h-z)^3 = y^2(h+z)^3,$$

c'est-à-dire une surface réglée du cinquième ordre ayant pour génératrice la droite

$$y = \lambda x, \qquad h - z = \lambda^{\frac{2}{3}}(h+z),$$

parallèle au plan xoy et s'appuyant sur l'axe des z qui est une ligne double de la surface. Tout plan passant par zz' coupe S suivant zz' et trois autres droites parallèles à xoy dont une seulement est réelle. La surface S est donc un conoïde ayant pour axe zz', pour plan directeur xoy.

Les coordonnées homogènes u, v, w, r d'un plan tangent à S au point (x, y, z) sont

$$u = 2x(z-h)^3,$$

$$v = 2y(z+h)^3,$$

$$w = 3y^2(z+h)^2 + 3x^2(z-h)^2,$$

$$r = 3hy^2(z+h)^2 - 3hx^2(z-h)^2,$$

d'où

$$\frac{u}{v} = \frac{x(z-h)^3}{y(z+h)^3} = -\frac{y}{x},$$

$$\frac{w}{r} = \frac{(z-h)^3(z+h)^2 - (z+h)^3(z-h)^2}{h[(z-h)^3(z+h)^2 + (z+h)^3(z-h)^2]} = \frac{z-h-(z+h)}{h(z-h+z+h)}$$

ou

$$\frac{w}{r} = -\frac{1}{z}.$$

En portant les valeurs de $\frac{y}{x}$ et de z dans (S) on

obtient l'équation tangentielle de la surface S

$$(1)\qquad u^2\left(-\frac{r}{w}+h\right)^3 = v^2\left(-\frac{r}{w}-h\right)^3$$

ou

$$(S_1)\qquad u^2(hw-r)^3 - v^2(hw+r)^3 = 0.$$

II. Les équations (G) peuvent s'écrire

$$x = \frac{\alpha}{2h}(z+h), \qquad y = -\frac{\beta}{2h}(z-h).$$

Ces équations, jointes à l'équation ponctuelle de S, savoir

$$x^2(z-h)^3 + y^2(z+h)^3 = 0,$$

donnent les coordonnées x, y, z d'un point quelconque M de la surface S en fonction de deux paramètres α et β. L'élimination de x et y donne l'équation

$$\alpha^2(z-h) + \beta^2(z+h) = 0.$$

D'où

$$\frac{z-h}{-\beta^2} = \frac{z+h}{\alpha^2} = \frac{2z}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{2h}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Par suite les coordonnées du point M sont

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\alpha^3}{\alpha^2+\beta^2},\\ y &= \frac{\beta^3}{\alpha^2+\beta^2},\\ z &= \frac{h(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2}.\end{aligned}\right.$$

Supposons que le point $P(\alpha, \beta, o)$ décrive une droite Δ ayant pour équations

$$(\Delta)\qquad z = 0, \qquad ax + by + c = 0.$$

on aura

$$(3)\qquad a\alpha + b\beta + c = 0.$$

Le lieu de M est une courbe définie paramétriquement par les équations (2) et (3), c'est-à-dire une cubique gauche Γ. On obtiendra les équations ponctuelles de cette cubique en éliminant α et β entre (2) et (3), ou encore entre les équations

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = \frac{z}{h},$$

$$\alpha x - \beta y = \alpha^2 - \beta^2,$$

$$a\alpha + b\beta + c = 0.$$

Des deux premières on tire α et β

$$\frac{2x}{\alpha} = 1 + \frac{z}{h}, \qquad \frac{2y}{\beta} = 1 - \frac{z}{h},$$

$$\alpha = \frac{2hx}{h+z}, \qquad \beta = \frac{2hy}{h-z}.$$

En portant dans les deux dernières on obtient l'équation de S, comme cela était à prévoir, et l'équation d'un paraboloïde ϖ_1 passant par D et D'; de sorte que la ligne lieu de M quand P décrit Δ est définie par les équations

$$(\mathrm{S})\qquad x^2(z-h)^3 - y^2(z+h)^3 = 0,$$

$$(\varpi_1)\quad 2ahx(h-z) + 2bhy(h+z) + c(h-z)(h+z) = 0.$$

L'intersection de la surface S et du paraboloïde ϖ_1 qui est du dixième degré se compose de D et D', droites doubles de S, de la droite de l'infini $t = 0$, $z = 0$ comptée trois fois et de la cubique Γ.

L'équation (ϖ_1) étant linéaire et homogène par

rapport aux trois paramètres a, b, c, on peut dire que cette équation peut représenter un paraboloïde quelconque passant par D et D′ : alors le calcul précédent montre que l'intersection de la surface S et d'un paraboloïde quelconque passant par D et D′ se compose des droites D, D′ comptées deux fois, de la droite à l'infini du plan xoy comptée trois fois et d'une cubique gauche.

Étudions maintenant l'intersection de S avec une quadrique quelconque H passant par D et D′. L'équation de H est de la forme

$$(\mathrm{H})\qquad \mathrm{A}x(z-h)+\mathrm{B}y(z+h)+\mathrm{C}(z-h)(z+h)+\mathrm{D}xy=0.$$

Pour tout point commun (x, y, z) à H et à S les paramètres α et β seront liés par une relation obtenue en remplaçant dans l'équation (H) les coordonnées x, y, z par leurs valeurs (2). En remarquant que

$$z-h=\frac{-2h\beta^2}{\alpha^2-\beta^2},\qquad z+h=\frac{2h\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2},$$

cette relation est

$$-2\mathrm{A}h\alpha^3\beta^2+2\mathrm{B}h\beta^3\alpha^2-4\mathrm{C}h^2\alpha^2\beta^2+\mathrm{D}\alpha^3\beta^3=0.$$

Elle se décompose en deux :

$$(4)\qquad \alpha^2\beta^2=0,$$

$$(5)\qquad \mathrm{D}\alpha\beta-2\mathrm{A}h\alpha+2\mathrm{B}h\beta-4\mathrm{C}h^2=0.$$

La première donne sur S les droites D et D′ comptées deux fois, car pour $\alpha=0$ ou $\beta=0$ on a respectivement

$$x=0,\qquad y=\beta,\qquad z=-h\qquad (\text{droite D}'),$$

$$y=0,\qquad x=\alpha,\qquad z=h\qquad (\text{droite D}).$$

Le lieu correspondant du point P(α, β) dans le plan xoy est l'axe oy ou l'axe ox.

L'équation (5), qui est une relation homographique

entre α et β, définit sur S une courbe du sixième degré C_6. Le lieu correspondant de P dans le plan xoy, défini par l'équation (5), est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes ox, oy.

Si D n'est pas nul, c'est-à-dire si H n'est pas un paraboloïde, de (5) on déduit

$$\beta = \frac{2h(A\alpha + 2Ch)}{D\alpha + 2Bh},$$

et d'après les formules (2) on obtiendrait aisément les coordonnées d'un point de C_6 en fonction du seul paramètre α.

La courbe C_6 se décompose quand la relation (5) se décompose; alors (5) prend la forme

$$(m\alpha + n)(m'\beta + n') = 0,$$

ce qui a lieu, comme on le voit sur l'expression précédente de β, quand on a

$$\frac{A}{D} = \frac{C}{B}.$$

L'hyperbole (5) se réduit à deux droites respectivement parallèles à ox, oy et la courbe C_6 se décompose en deux cubiques planes : car, si l'on appelle λ la valeur commune des rapports précédents, on a

$$A = D\lambda, \qquad C = B\lambda,$$

et l'équation (H) devient

$$[y - \lambda(z - h)][Dx - B(z + h)] = 0,$$

c'est-à-dire que la quadrique H se réduit à deux plans passant respectivement par D, D' et déterminant dans S deux cubiques.

Si D = 0, la quadrique H est un paraboloïde, et l'on

retrouve les résultats indiqués plus haut : la courbe C_6 est remplacée par une cubique gauche Γ et la droite à l'infini du plan xoy comptée trois fois : l'hyperbole (5) est remplacée par une droite quelconque du plan xoy. La cubique Γ devient plane si $A = 0$ ou $B = 0$, auquel cas le paraboloïde se décompose en un plan parallèle à xoy passant par l'une des droites D, D' et un autre plan passant par l'autre droite. Le lieu de P est une droite parallèle à ox ou oy.

III. Les équations ponctuelle et tangentielle de S sont, en coordonnées homogènes,

$$(S) \qquad x^2(z - ht)^3 - y^2(z + ht)^3 = 0,$$

$$(S_1) \qquad u^2(hw - r)^3 - v^2(hw + r)^3 = 0.$$

Soit une quadrique Q ayant pour équation ponctuelle

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Les coordonnées homogènes du plan polaire d'un point (x, y, z, t) de S par rapport à Q sont

$$u = f_x, \qquad v = f_y, \qquad w = f_z, \qquad r = f_t;$$

en remplaçant u, v, w, r par ces valeurs dans (S_1), on doit obtenir l'équation ponctuelle de S. En identifiant l'équation obtenue avec l'équation (S) on voit aisément que, si la quadrique Q existe, son équation ne peut être que de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2C''z + D = 0,$$

c'est-à-dire que Q est une quadrique ayant pour plans de symétrie rectangulaires yoz et zox, pour axe de symétrie oz. D'ailleurs ce résultat est à peu près évident en remarquant que la surface S possède cette symétrie.

On a alors

$$u = \tfrac{1}{2} f_1 = \mathrm{A} x,$$

$$v = \tfrac{1}{2} f_2 = \mathrm{A}' y,$$

$$w = \tfrac{1}{2} f_3 = \mathrm{A}'' z + \mathrm{C}'',$$

$$r = \tfrac{1}{2} f_4 = \mathrm{C}'' z + \mathrm{D}.$$

Portant ces valeurs dans (S_1), on obtient l'équation

$$\mathrm{A}^2 x^2 [z(\mathrm{A}'' h - \mathrm{C}'') + \mathrm{C}'' h - \mathrm{D}]^3$$
$$- \mathrm{A}'^2 y^2 [z(\mathrm{A}'' h + \mathrm{C}'') + \mathrm{C}'' h + \mathrm{D}]^3 = 0.$$

En identifiant avec (S), qu'on écrit

$$x^2 (h - z)^3 - y^2 (h + z)^3 = 0,$$

on a les relations

$$\mathrm{A}^{\frac{2}{3}} (\mathrm{C}'' - \mathrm{A}'' h) = \frac{\mathrm{A}^{\frac{2}{3}} (\mathrm{C}'' h - \mathrm{D})}{h}$$
$$= \mathrm{A}'^{\frac{2}{3}} (\mathrm{A}'' h + \mathrm{C}'') = \frac{\mathrm{A}'^{\frac{2}{3}} (\mathrm{C}'' h + \mathrm{D})}{h},$$

qui se réduisent aux deux suivantes

$$\mathrm{D} = \mathrm{A}'' h^2,$$

$$\mathrm{C}'' \left(\mathrm{A}^{\frac{2}{3}} - \mathrm{A}'^{\frac{2}{3}} \right) = \mathrm{A}'' h \left(\mathrm{A}^{\frac{2}{3}} + \mathrm{A}'^{\frac{2}{3}} \right).$$

Les deux coefficients A et A' sont différents de zéro; quant à A'' il peut être nul ou non.

Si $\mathrm{A}'' = 0$, on a

$$\mathrm{D} = 0,$$

et, comme C'' est différent de zéro, sans quoi la quadrique Q se réduirait à deux plans, on aura

$$\mathrm{A}^{\frac{2}{3}} - \mathrm{A}'^{\frac{2}{3}} = 0,$$

d'où

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}'^2,$$

$$\mathrm{A} = \pm \mathrm{A}'.$$

Les quadriques Q ont, dans ce cas, pour équation générale,

$$A(x^2 \pm y^2) - 2C'' z = 0$$

ou

$$x^2 \pm y^2 - 2pz = 0,$$

c'est-à-dire sont des paraboloïdes Q_1 de révolution ou équilatères.

Si A'' n'est pas nul, D est différent de zéro ainsi que C'', A et A'. Nous poserons

$$A^{\frac{1}{4}} = a, \qquad A'^{\frac{1}{4}} = a';$$

par suite

$$A = a^4, \qquad A' = a'^4, \qquad C'' = A'' h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2}.$$

L'équation générale des quadriques Q est

$$a^4 x^2 \pm a'^4 y^2 + A'' z^2 - 2A'' h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2} z + A'' h^2 = 0.$$

Comme A'' est différent de zéro, on peut supposer $A'' = 1$, et l'équation précédente s'écrit

$$f(x, y, z) = a^4 x^2 \pm a'^4 y^2 - z^2 - 2h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2} z + h^2 = 0.$$

On obtient l'enveloppe de ces quadriques Q en éliminant a, a' entre l'équation précédente et les suivantes

$$f_a = 0, \qquad f_{a'} = 0$$

ou

$$4a^3 x^2 - 2hz \frac{(a^2 - a'^2)2a - (a^2 + a'^2)2a}{(a^2 - a'^2)^2} = 0,$$

$$4a'^3 y^2 - 2hz \frac{(a^2 - a'^2)2a' + (a^2 + a'^2)2a'}{(a^2 - a'^2)^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$4a x^2 - 8hz \frac{a'^2}{(a^2 - a'^2)^2} = 0,$$

$$4a' y^2 + 8hz \frac{a^2}{(a^2 - a'^2)^2} = 0.$$

De ces deux dernières équations on déduit, en éliminant z,

$$a^3 x^2 - a'^3 y^2 = 0,$$

et, d'après l'équation $f(x, y, z) = 0$, on aura

$$z^2 - 2h \frac{(a^2 + a'^2)}{a^2 - a'^2} z + h^2 = 0$$

ou

$$\frac{z^2 + h^2}{2hz} = \frac{a'^2 + a^2}{a'^2 - a^2}.$$

D'où

$$\frac{(z - h)^2}{(z + h)^2} = \frac{2a^2}{2a'^2} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

On en déduit

$$\frac{a}{a'} = \pm \frac{z - h}{z + h}.$$

Remplaçant $\frac{a}{a'}$ par l'une ou l'autre de ces valeurs dans l'équation

$$a^3 x^2 - a'^3 y^2 = 0,$$

on obtient pour enveloppe des quadriques Q les deux surfaces

$$x^2 (z - h)^3 \mp y^2 (z + h)^3 = 0,$$

dont l'une est la surface S.

BIBLIOGRAPHIE.

Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung; von *Dr Heinrich Wieleitner*. — 1 vol. in-8 de XXII-313 pages, avec 82 figures dans le texte. — Leipzig, Göschen, 1905.

Cet Ouvrage, qui fait partie de la *Sammlung Schubert*, collection bien connue de traités sur les diverses parties des

Mathématiques, constitue un excellent et substantiel exposé des faits principaux de la théorie *pure* des courbes algébriques; j'entends par théorie pure celle qui n'est pas dominée par la préoccupation d'étudier les *fonctions algébriques*. Les connaissances supposées chez le lecteur sont réduites au minimum : éléments de la Géométrie analytique et du Calcul différentiel.

Un résumé de l'Ouvrage en fera connaître le plan et la portée.

CHAPITRE I. — Généralités, définitions des courbes algébriques, distinction entre les propriétés métriques et les propriétés projectives, éléments imaginaires, principe de dualité, ordre et classe d'une courbe.

CHAPITRE II. — Polaires de divers ordres, points multiples, leur influence sur la classe, théorie des enveloppes.

CHAPITRE III. — Courbes associées à une courbe donnée (hessienne, cayleyenne, steinerienne).

CHAPITRE IV. — Formules de Plücker.

CHAPITRE V. — Notion de genre, courbes unicursales, conservation du genre par une transformation birationnelle (démonstration de Zeuthen-Bertini).

CHAPITRE VI. — Définition du *triangle analytique*, recherches des asymptotes, des *courbes approchantes*, de l'équation d'une courbe de forme donnée *a priori*. La lecture de ce Chapitre, consacré à des sujets peu connus en France, croyons-nous, est tout particulièrement recommandable.

CHAPITRE VII. — Étude des singularités élevées.

CHAPITRE VIII. — Transformations, en particulier transformation quadratique, *dispersion* des singularités.

CHAPITRE IX. — Étude générale des correspondances entre courbes.

CHAPITRE X. — Étude des points communs à deux courbes. Théorème de Brill et Nöther.

CHAPITRE XI. — Application des résultats du Chapitre pré-

cèdent aux cubiques, aux *quartiques de Luroth* (circonscrites à une infinité de pentagones complets).

Chapitre XII. — Étude particulière des cubiques.

Chapitre XIII. — Étude particulière des quartiques.

Chapitre XIV. — Systèmes de courbes (faisceaux, réseaux, systèmes non linéaires, caractéristiques).

J'ai dû me borner à un exposé très rapide, qui ne donne pas une idée suffisante de la richesse de l'Ouvrage, et non plus de la précision et de l'élégance des démonstrations. Signalons en terminant que les figures sont dessinées avec le plus grand soin : les courbes y sont tracées avec leur forme exacte, sauf pour un très petit nombre de figures schématiques que l'auteur signale du reste lui-même. R. B.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

Épreuve écrite. — I. *Établir le théorème de Lagrange et Dirichlet sur la stabilité d'un système dépendant d'une fonction de forces et d'un nombre fini de paramètres.*

II. *Un ressort de masse négligeable communique à un pendule pesant un moment de rappel proportionnel à l'angle d'écart au point mort du ressort.*

1° *Calculer la position d'équilibre et la durée des petites oscillations exécutées autour de cette position par le pendule ainsi modifié.*

2° *En supposant petite l'action de la pesanteur par rapport à celle du ressort, étudier, par la méthode de la variation des constantes, les grandes oscillations du système, et déterminer leur durée en fonction de la demi-amplitude en cours prise par rapport à la position du point mort du ressort.*

3° *Comparaison de deux écarts extrêmes consécutifs.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule constitué d'une tige très mince et d'une sphère de 10cm de rayon est muni d'un petit curseur dont la masse est à celle de la sphère dans le rapport de 1 à [illegible].*

On demande :

1° Au-dessus de quel niveau N on placera le curseur pour être assuré que toute descente du curseur ralentira les battements du pendule?

2° Après avoir placé le curseur au-dessous et près de la sphère, quel écart faut-il ménager au curseur pour que cet



écart soit capable de corriger un écart de marche de [illegible] battements du pendule sur 86400 battements.

La distance de l'axe de suspension au centre de la sphère est 1m ; la masse de la tige est regardée comme négligeable ; le pendule est supposé placé à température constante.

(Juin 190[illegible]).

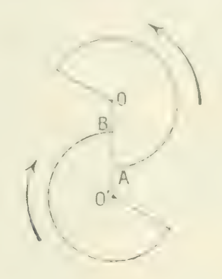
ÉPREUVE ÉCRITE. — I. 1° *Théorème des moments des quantités de mouvement.*

2° Un ensemble de points matériels est soumis à des forces mutuelles dont le potentiel est une fonction uniforme de la configuration intrinsèque du système ; démontrer que, si cet ensemble a toutes ses vitesses nulles au départ, il ne pourra reprendre plus tard sa CONFIGURATION

INITIALE *que s'il retrouve en même temps son* ORIENTATION INITIALE.

II. *On considère une tige homogène pesante s'appuyant avec frottements sur l'intérieur d'une demi-sphère creuse et sur le bord de la circonférence horizontale qui limite la surface sphérique supérieurement. Former les équations qui feront connaître les inclinaisons extrêmes de la tige sur l'horizon entre lesquelles se répartiront les inclinaisons de la tige maintenue en équilibre dans le plan d'un même grand cercle vertical de la sphère. Le coefficient des deux frottements est f.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux cames à profils rectilignes sont portées par deux solides en rotations parallèles et de*



sens contraires autour de deux axes O et O'. Soient ω et ω' les vitesses angulaires des deux solides à un instant donné. On demande :

1° *D'étudier comment varie le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ durant la conduite de la came O par la came O'.*

2° *De calculer les angles α et α' dont tournent alors les deux solides pendant la conduite depuis l'instant où les deux profils formaient une seule et même droite perpendiculaire commune aux deux axes.*

Données :

Distances des axes OO'	....	50^{cm}
Distances des becs des deux profils	O'A......	40
à leurs axes respectifs	OB.......	30

(Novembre 1905.)

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Accélération. Accélérations tangentielle et centripète. Détermination de l'accélération dans un système de coordonnées curvilignes quelconques, application aux coordonnées polaires dans le plan et dans l'espace.*

II. *Mouvement d'une barre soumise à des liaisons sans frottements et attirée par un point fixe.*

La barre est homogène et pesante; l'extrémité B *glisse sur un cercle vertical, l'extrémité* F *est articulée en un point de l'arc du cercle. Le point le plus élevé* A *du cercle attire les éléments de la barre proportionnellement à la distance et à la masse.*

On déterminera les forces de liaisons auxquelles la barre est soumise en B *et* F.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un solide homogène a la forme d'une pyramide dont la base* ABC *est un triangle équilatéral, et dont la hauteur est* SA, S *désignant le sommet. Déterminer le rayon de giration autour de l'arête* SB :

$$AB = 1^{m}, \qquad SA = 2^{m}.$$

(Juillet 1905.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Pendule composé.*

II. *Mouvement d'un disque qui a un point fixe et d'une chaîne placée sur sa périphérie.*

Le disque, circulaire et de rayon R, *homogène et pesant, est mobile sans frottements dans un plan vertical, autour d'un des points* O *de sa circonférence.*

La chaîne, homogène et pesante, glisse sans frottements sur une gorge pratiquée à la périphérie du disque.

Cas où, à l'origine du temps, le système est immobile.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'énergie cinétique d'un disque circulaire homogène, pesant* $3^{kg},603$ *et roulant sans glisser sur une route horizontale, de telle sorte que son*

centre de figure parcourt uniformément 100^m *en 4 minutes :*

$$g = 9,809 \text{ mètres-secondes.}$$

Exprimer le résultat en unités communes et en unités C. G. S. (Novembre 1905.)

Grenoble.

Épreuve écrite. — *Une barre homogène* OA, *de masse* M, *de longueur* l, *est mobile autour de son extrémité* O *qui est fixe. L'autre extrémité* A *est attirée par un point fixe* B *situé également à une distance* l *du point* O. *L'attraction est inversement proportionnelle au cube de la distance ; c'est, d'ailleurs, la seule force donnée.*

1° *Former les équations du mouvement de la barre.*

2° *Discuter ce mouvement, en supposant qu'à l'instant initial la barre est lancée tangentiellement au plan perpendiculaire à* OB *passant par* O.

3° *Dans ce même cas particulier, déterminer explicitement en fonction du temps les cosinus de l'angle* AOB.

Épreuve pratique. — *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes rectangulaires. Les six plans*

$$x = a, \quad x = -a,$$
$$y = a, \quad y = -a,$$
$$z = c, \quad z = -c$$

déterminent un parallélépipède rectangle. Ce parallélépipède limite un solide homogène S *dont la masse est* M.

A l'instant initial, le solide S *est animé d'une rotation* ω *autour d'un axe* OR, *situé dans le plan* xOz, *faisant avec* Oz *un angle* α. *Dans l'espace, cet axe* OR *est dirigé suivant la verticale descendante.*

1° *Déterminer, à cet instant, la force vive de* S *et le moment résultant, relatif à* O, *des quantités du mouvement de* S.

2° *Le solide étant abandonné à l'action de son poids (et n'étant soumis à aucune liaison), déterminer le mouvement ultérieur par le mouvement du centre de gravité et*

les éléments du mouvement autour du centre de gravité (cônes roulettes, vitesses angulaires). Quels seront, au bout du temps t_1, les angles d'Euler définissant l'orientation du trièdre $Oxyz$ par rapport à un autre trièdre dont les axes ont des directions fixes que l'on choisira convenablement.

3° *Application numérique :*

$$M = 4, \quad a = \sqrt{2}, \quad b = 1, \quad \omega = 30, \quad t_1 = 1$$

(unités C. G. S.). *OR est bissectrice intérieure de xOy.*

(Novembre 1905.)

Lille.

Épreuve écrite. — I. *Appliquer les équations générales d'équilibre d'un fil flexible, inextensible et sans torsion à la recherche de la figure d'équilibre d'un fil pesant homogène librement suspendu par ses deux extrémités.*

II. *Un tube circulaire, homogène, pesant, de très petite section, est assujetti à glisser sans frottement sur une droite horizontale Ox. A l'intérieur du tube glisse sans frottement un point pesant de masse égale à celle du tube.*

Étudier le mouvement, en supposant qu'à l'instant initial le système est abandonné dans le plan vertical de Ox avec des vitesses dirigées dans ce plan.

Épreuve pratique. — *Déterminer la vitesse d'une balle de revolver d'après les observations suivantes faites à la balance balistique :*

1° *La balle produit une déviation maxima de* 13°40', *la distance de la ligne de tir à l'axe de rotation étant de* 14^{cm}; *la durée d'oscillation est de* $6^s,7$.

2° 10^g *suspendus au levier à* 40^{cm} *de l'axe de suspension donnent une déviation permanente de* 14°20'.

La masse de la balle est de $7^g,7$.

N. B. — *On établira sommairement la formule qui détermine la vitesse demandée.* (Novembre 1905.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un ellipsoïde, homogène et pesant, dont la masse est égale à 5, a pour équation par rapport à ses axes de symétrie*

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{1} = 1.$$

Cet ellipsoïde étant immobile et s'appuyant sur un plan horizontal fixe par l'un des sommets de son grand axe, on lui imprime, au point de coordonnées

$$x = -\sqrt{\frac{96}{167}}, \qquad y = \sqrt{\frac{270}{167}}, \qquad z = 0,$$

une percussion ayant pour composantes

$$X = -\sqrt{\frac{835}{18}}, \qquad Y = 0, \qquad Z = \sqrt{\frac{167}{6}}.$$

Quel mouvement prend le solide?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une barre pesante* AB *repose tangentiellement sur une courbe dont le plan est vertical, et appuie son extrémité* A *contre un plan vertical perpendiculaire au premier. Déterminer la courbe de manière que la barre reste en équilibre, quel que soit son point de contact.*

Il n'y a pas de frottement. (Novembre 1905.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Les extrémités d'une tige homogène pesante* AB *de longueur* $2l$ *sont assujetties à se mouvoir, la première sur une horizontale* Ox, *la seconde sur une verticale* Oy. *Le système tout entier tourne autour de* Oy *avec une vitesse angulaire constante* ω.

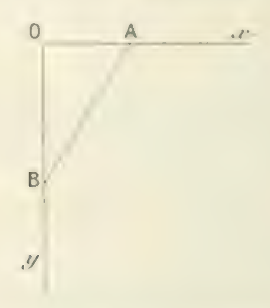
On demande :

1° *De former les équations du mouvement relatif de la barre dans le plan* xOy.

2° *De trouver la position d'équilibre relatif de la barre. Cet équilibre est-il stable ou instable?*

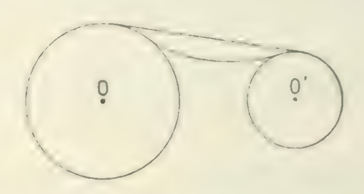
3° *Dans le cas où l'équilibre est stable, d'étudier le mouvement de la barre autour de cette position d'équilibre.*

4° *De calculer les réactions aux points* A *et* B.



On néglige le frottement des extrémités A *et* B *sur* Ox *et* Oy.

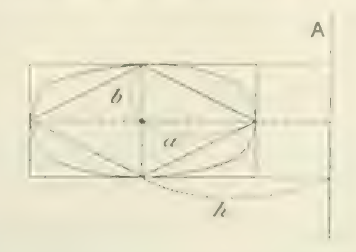
II. *Deux poulies homogènes situées dans un même plan vertical tournent autour de deux axes parallèles* O *et* O′



avec des vitesses angulaires estimées dans un même sens de rotation égales à ω_0 *et* ω'_0.

Un fil non tendu s'enroule sur les deux poulies. A un moment donné le fil se tend de telle sorte que les mouvements des deux poulies qui étaient indépendants deviennent brusquement solidaires l'un de l'autre. On suppose que la tension du fil persiste après le choc, et l'on demande ce que deviennent les vitesses angulaires des deux poulies. On donne les rayons des deux poulies R *et* R', *les moments d'inertie* μ *et* μ'.

Épreuve pratique. — *Comparer les moments d'inertie relativement à leur axe commun* Λ *des trois anneaux homogènes engendrés par la révolution simultanée d'une*



ellipse, de son rectangle circonscrit, de son losange inscrit autour d'une droite Λ *parallèle au petit axe de l'ellipsé.*

(Novembre 1905.)

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Besançon.

Épreuve écrite. — I. *On demande de calculer les éléments* Ω, ω, *i*, *q et* T *d'une orbite parabolique possédant les racines de l'équation d'Euler s, u, r et r'.*

II. *Établir les formules usuelles de la parallaxe en ascension droite et déclinaison.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'arc de grand cercle d'horizon compris entre le lever du Soleil au solstice d'été* 21 *juin et au solstice d'hiver* 22 *décembre à Besançon.*

Latitude de Besançon.............. $\varphi = 47°14'59''.4$
Inclinaison moyenne de l'écliptique
sur l'équateur................. $\omega = 23°27'5''.6$

(Juin 1905.)

Épreuve écrite. — I. *Planètes. Établir les lois du mouvement héliocentrique et donner l'ensemble des formules*

qui font connaître les coordonnées géocentriques équatoriales.

II. *Interpolation. De la formule fondamentale de Newton déduire la formule usuelle ou de Stirlings*

$$f(a+uw)$$

$$= f(a) + \frac{u}{1} f'(a) + \frac{u^2}{1.2} f''(a)$$

$$+ \frac{u(u^2-1)}{1.2.3} f'''(a) + \frac{u^2(u^2-1)}{1.2.3.4} f^{\text{IV}}(a) + \ldots .$$

Épreuve pratique. — *Trouver le moment où une comète parabolique ayant passé au périhélie le 13 septembre, à midi, sera à une distance du Soleil $r = 2,065420$, sachant que la distance périhélie $q = 1,532675$ et que*

$$\log \sqrt{f} = 8,235581.$$

Unité de distance : Terre, Soleil.

Unité du temps : jour solaire moyen.

(Novembre 1905.)

Bordeaux.

Épreuve écrite. — *Établir géométriquement l'équation de Kepler*

$$u - e \sin u = nt.$$

Expression du rayon vecteur r en fonction de u.

Expression de l'anomalie vraie V en fonction de l'anomalie excentrique u.

Expression de l'anomalie vraie V par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de e et les sinus des multiples de u.

Épreuve pratique. — *Calcul de l'éclipse de Lune du 14 août 1901 par la méthode des différences d'ascensions droites et déclinaisons.* (Juillet 1905.)

Épreuve écrite. — *Démontrer, par des considérations géométriques, les formules de Mayer et de Bessel pour la réduction des observations méridiennes.*

Rapport algébrique de ces deux séries de formules.

Détermination expérimentale de l'inclinaison de l'axe et de la collimation.

Épreuve pratique. — *Calculer pour Bordeaux*

$$(\varphi = 44°50'7'',2)$$

les digressions de la polaire ($\delta = 88°46'45'',4$) *lorsque ses angles horaires sont de* $5^h 0^m$, $5^h 4^m$, $5^h 8^m$, ... *et* $5^h 20^m$.

Vérifier le calcul par la méthode des différences.

La digression, comptée à partir du Nord vers l'Ouest, est donnée par la formule

$$\tang A = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos\delta \cos t}.$$

(Novembre 1905.)

Grenoble.

Épreuve écrite. — I. *Compensation des angles d'un triangle.*

II. *Compensation des angles d'une chaine de triangles qui s'appuie sur deux bases extrêmes, tous les angles des triangles ayant été mesurés.*

III. *Théorème de Legendre pour la résolution d'un triangle géodésique.*

Épreuve pratique. — *Etant donné l'azimut* A *du coucher d'une étoile de déclinaison* $\mathcal{D}$, *calculer la durée* T *de la course apparente de l'étoile au-dessus de l'horizon du lieu, ainsi que la latitude* λ *de ce lieu. Déterminer les variations* ΔT *et* $\Delta\lambda$ *de* T *et de* λ *qui correspondent à une variation* ΔA *de* A.

On ne tiendra pas compte de la réfraction. Application numérique :

$$A = 66°2'13'',5,$$
$$\mathcal{D} = -16°38'1'',02,$$
$$\Delta A = -1'.$$

(Novembre 1905.)

Marseille.

Épreuve écrite. — *Théorie de la lunette méridienne.*

Exposer comment, avec une lunette méridienne bien réglée et une pendule, on détermine l'heure locale ainsi que les ascensions droites relatives des astres.

Établir les formules qui permettent de tenir compte des erreurs instrumentales et expliquer comment on détermine ces erreurs.

Épreuve pratique. — *Connaissant la latitude géographique* φ *d'un point de la Terre, calculer la latitude géocentrique* φ' *de ce point et son rayon vecteur r, en admettant que la surface terrestre est un ellipsoïde de révolution dont l'aplatissement est* $\frac{1}{293}$ *et en prenant pour unité le rayon équatorial.*

Donnée numérique :

$$43^\circ 18' 17'',5.$$

(Novembre 1905.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Erreur d'excentricité dans le théodolite. Forme et détermination des constantes instrumentales figurant dans la formule de correction. Erreurs de division des cercles gradués. Formule générale de toutes ces erreurs et procédé général d'élimination par l'emploi de plusieurs verniers.*

Épreuve pratique. — *La formule pour la correction de l'erreur d'excentricité dans le théodolite est*

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{e}{r}\right)^n \sin n(A - \alpha),$$

supposons que les constantes instrumentales soient

$$\frac{e}{r} = \frac{1}{5000}, \qquad \alpha = 180^\circ 20' 37''$$

et que l'on ait fait la lecture

$$A = 53^\circ 26' 49''.$$

Déterminer la correction ε en secondes et à moins d'une seconde près. (Novembre 1905.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Définir l'équation du centre. Étudier sa variation.*

II. *Deux planètes* A *et* B *décrivent dans le même plan des cercles concentriques dont les rayons sont respectivement* 16 *et* 36, *le moyen mouvement diurne de la planète* B *étant* 64''. *On suppose qu'à l'origine du temps les deux planètes sont en opposition. On demande :*

1° *De trouver la longitude de la planète* A *supposée vue de la planète* B, *et d'étudier la variation de cette longitude ;*

2° *De trouver l'angle sous lequel on voit, de la planète* B, *la planète* A *et le Soleil et d'étudier la variation de cet angle.*

Épreuve pratique. — *L'excentricité de le planète* (23) *Thalie est* 0,234291 *et son moyen mouvement diurne* 833''.5. *A une certaine date, l'anomalie vraie étant* 30°, *on demande de calculer :*

1° *L'anomalie excentrique à cette date ;*

2° *L'anomalie moyenne à cette date ;*

3° *Le temps écoulé depuis son dernier passage au périhélie.* (Novembre 1905.)

Nancy.

Épreuve écrite. — I. *En supposant connues les trois formules fondamentales de la trigonométrie sphérique, établir les analogies de Neper.*

II. *Expliquer comment on établit, en Astronomie, que les planètes suivent les lois de Kepler. Les six éléments d'une planète.*

Épreuve pratique. — *A une certaine époque, les coordonnées héliocentriques d'une planète ont pour valeurs :*

Longitude	$l = 119°$ [illegible]
Latitude	$\lambda =$ [illegible]
Rayon vecteur	$r = 0,7$ [illegible]

On demande de calculer la longitude λ et la latitude β géocentriques de cette planète, sachant que, à la même époque, la Terre a pour coordonnées héliocentriques

Longitude	$L_0 =$ [illegible] $,10$
Rayon vecteur	$r_0 = 1,016$ [illegible]

(Juillet 1905.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1664.

([illegible])

Une courbe du quatrième ordre, qui a trois points doubles, admet généralement quatre tangentes doubles, qui forment quatre triangles homologiques du triangle déterminé par les points doubles. (Ernest Duporcq.)

1665.

([illegible])

Si trois cercles sont inscrits à un triangle, les quatrièmes tangentes communes qu'ils admettent, pris deux à deux, forment un triangle homologique du premier.

(Ernest Duporcq.)

SOLUTIONS

Par M. Thil.

La démonstration de la proposition 1665 est immédiate. Supposons par exemple que les trois cercles dont il s'agit soient les trois cercles *extérieurs* : alors on voit tout de

suite que les côtés du triangle formé par les quatrièmes tangentes communes rencontrent les côtés du triangle donné aux pieds des bissectrices extérieures de ce dernier. Ces pieds sont en ligne droite, donc, etc.

Voici maintenant comment on peut rattacher l'énoncé 1664 au précédent.

On voit d'abord, par le même raisonnement élémentaire, que :

Si trois cônes de révolution sont inscrits à un même trièdre, les quatrièmes plans tangents communs qu'ils admettent, pris deux à deux, forment un trièdre homologique du premier.

Dans cette proposition, remplaçons les mots *cônes de révolution* par *cônes touchant un même cône suivant deux arêtes,* pour avoir une généralisation projective; effectuons ensuite une transformation par polaires réciproques, et prenons enfin la trace de la figure obtenue sur un plan quelconque : on aboutit à l'énoncé suivant :

Soient ABC *un triangle et* S *une conique quelconques. Il existe quatre coniques passant par les points* A, B, C *et bitangentes à* S. *Trois de ces coniques se coupent, deux à deux, en trois points qui sont les sommets d'un triangle homologique à* ABC.

Effectuons alors une transformation quadratique ayant ABC pour triangle fondamental; S devient une biquadratique S′ ayant trois points doubles en A, B, C. Les quatre coniques bitangentes à S deviennent les quatre bitangentes de S′. Trois d'entre elles forment bien un triangle homologique à ABC, en vertu de ce théorème :

Si trois points sont les sommets d'un triangle homologique au triangle fondamental d'une transformation quadratique, il en est de même de leurs transformés.

Cette dernière proposition est bien connue, quand la transformation quadratique considérée est l'*inversion par rapport à un triangle.* Il suffit d'une transformation homographique pour avoir l'énoncé général.

QUESTIONS.

2032. On considère une cardioïde dont le sommet est S, dont le point de rebroussement est O, et dont les points de contact de la tangente perpendiculaire à OS sont A et B. On prend le point I situé entre O et S et tel que $OI = \frac{OS}{4}$. On décrit le cercle C de centre I et de rayon IA.

Soient T le point de contact d'une des tangentes au cercle C issues d'un point quelconque M de la cardioïde, et P la projection de M sur la droite AB. Démontrer que, quel que soit M, on a

$$8\,\overline{MT}^2 = \overline{OS}^3 \cdot MP,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\overline{MT}^2}{MP} = \text{const.}$$

(E.-N. BARISIEN.)

2033. Si, dans le triangle sphérique ABC, l'angle A est de grandeur constante, et si l'on a

$$\frac{\tan g\,AB}{\tan g\,AC} = \text{const.},$$

on a aussi

$$\frac{\cos \overline{B}}{\cos \overline{C}} = \text{const.}$$

(R. B.)

2034. Soit dans un cercle une corde AF perpendiculaire au diamètre BC. On prend une parabole de foyer F tangente aux côtés du triangle ABC et un cercle de centre A tangent à BC en dehors de BC, les tangentes communes à ce cercle et à cette parabole forment un triangle équilatéral.

(MANNHEIM.)

[R7fα]

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES PETITES OSCILLATIONS D'UN PENDULE SIMPLE;

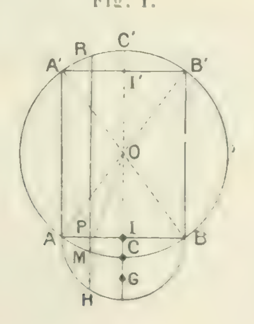
Par M. Ed. COLLIGNON.

I. Soient :

O le centre fixe auquel est attaché le fil, inextensible et sans masse, qui soutient le point pesant mobile M;
$OA = OB = OM = l$ le rayon de la circonférence décrite par le point mobile;
l la longueur du pendule simple;
ACB l'arc, supposé très petit, que ce point parcourt dans son mouvement oscillatoire;
IC la flèche de cet arc.

Lorsque le point mobile, parti sans vitesse du point A (*fig.* 1), passe au point M, il possède une

Fig. 1.



vitesse v donnée par la formule

$$v = \sqrt{2g \cdot \text{PM}}.$$

puisqu'il tombe de la hauteur PM, à partir du niveau AB où sa vitesse est nulle.

Prolongeons l'ordonnée MP jusqu'à la rencontre en R avec la circonférence. Nous aurons

$$\mathrm{PM} \times \mathrm{PR} = \mathrm{PA} \times \mathrm{PB},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{PM} = \frac{\mathrm{PA} \times \mathrm{PB}}{\mathrm{PR}}.$$

Sur la corde AB comme diamètre décrivons la demi-circonférence AHB, et soit H le point où l'ordonnée PM prolongée la rencontre. On aura

$$\overline{\mathrm{PH}}^2 = \mathrm{PA} \times \mathrm{PB}$$

et, par suite,

$$\mathrm{PM} = \frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\mathrm{PR}}.$$

On en déduit pour la vitesse

$$(1) \qquad v = \sqrt{2g}\,\frac{\mathrm{PH}}{\sqrt{\mathrm{PR}}},$$

équation qui va nous servir à déterminer approximativement la *vitesse moyenne u* du point mobile dans son parcours de l'arc ACB.

Les quantités PH et PR sont les seules variables dans l'équation (1), mais elles varient dans des conditions très différentes : PH varie de 0 à $\frac{1}{2}$ AB, puis de $\frac{1}{2}$ AB à 0, suivant les ordonnées du demi-cercle AHB rapporté à son diamètre AB; au contraire, la quantité PR reste toujours comprise entre les limites

$$\mathrm{AA'} = \mathrm{BB'} = 2l\cos\alpha, \qquad \mathrm{IC'} = l(1 + \cos\alpha),$$

en appelant α l'angle AOC = AOB, qui mesure l'écart

initial. *Si cet angle est très petit*, on a sensiblement

$$AA' = 2l - l\alpha^2 \quad \text{et} \quad IG = 2l - l\frac{\alpha^2}{2},$$

de sorte que la grandeur PR est très peu variable, et s'écarte peu d'une certaine valeur moyenne qu'on peut regarder comme constante ; ce qui introduit dans l'équation (1) une notable simplification.

II. Supposons d'abord α infiniment petit. Les quantités $l\alpha^2$ et $l\frac{\alpha^2}{2}$ sont alors négligeables vis-à-vis de $2l$, et les deux limites de PR deviennent égales à $2l$. On a, par conséquent,

$$(2) \qquad v = \sqrt{\frac{g}{l}}\,PH,$$

de sorte que la moyenne u des valeurs de v correspond à la moyenne des valeurs de PH quand le point H parcourt la demi-circonférence AHB. Cette valeur moyenne est l'ordonnée du centre G des moyennes distances de l'arc AHB à son diamètre AB, ou, en d'autres termes, l'ordonnée du centre de gravité de cet arc. On a, par une formule connue,

$$IG = \frac{AB}{\pi} = \frac{2l\sin\alpha}{\pi}$$

et, par suite,

$$(3) \qquad u = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{2l\sin\alpha}{\pi}.$$

La durée t de l'oscillation simple s'obtient en divisant la longueur ACB du chemin parcouru par la vitesse moyenne u du mobile ; on a donc

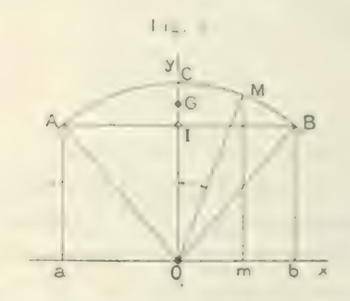
$$(4) \qquad t = \frac{2l\alpha}{2l\sin\alpha}\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

en observant que le rapport $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$ a pour limite l'unité, lorsque l'angle α est infiniment petit.

III. Cette formule (4) s'obtient, comme on le voit, sans intégration, pourvu que l'on connaisse la position du centre de gravité d'un arc de cercle homogène; or cette détermination s'obtient également sans intégration en s'aidant de l'équation d'un mouvement circulaire uniforme projeté sur un diamètre fixe.

En effet, soit ACB un arc de cercle, décrit du point O comme centre avec OA = OB = R pour rayon (*fig.* 2).

Fig. 2.



Menons la bissectrice OCY de cet arc, et traçons l'arc OX perpendiculaire à OY.

Imaginons un point M qui parcoure l'arc ACB d'un mouvement uniforme, avec une vitesse angulaire constante, ω, autour du centre O. Projetons le mouvement sur l'axe OX, et soit $Om = x$ l'abscisse du point m, projection de M, à l'époque t; nous aurons, pour l'équation du mouvement projeté,

$$x = R \sin \omega t,$$

en comptant le temps t à partir du passage du point m en O, ou du point M en C. La vitesse v de ce mouve-

ment sera donnée par l'équation

$$v = \frac{dx}{dt} = R\omega \cos \omega t = \omega R \cos \omega t = \omega y,$$

en appelant y l'ordonnée mM du point M.

La vitesse moyenne u du point m dans le parcours du segment ab, projection de l'arc total, sera le produit ωy_1 de la vitesse angulaire ω par l'ordonnée y_1, moyenne de toutes les ordonnées y des points de l'arc circulaire, c'est-à-dire par l'ordonnée OG du centre de gravité de cet arc. Nous poserons donc

$$u = \omega y_1 = \frac{ab}{t} = \frac{AB}{t},$$

t étant la durée du parcours $ab = AB$ du point projeté de a en b, ou de A en B le long de la corde. Cette durée est égale à celle du parcours de l'arc ACB par le point M, et l'on a aussi

$$\omega t = \frac{\text{arc ACB}}{R}.$$

Par conséquent, on a à la fois les deux relations

$$\omega y_1 = \frac{AB}{t} \quad \text{et} \quad \omega t = \frac{\text{arc ACB}}{R}.$$

Entre ces deux équations éliminons le produit ωt : il viendra, en résolvant par rapport à y_1,

$$y_1 = \frac{R \times \text{corde AB}}{\text{arc ACB}},$$

formule connue de la distance au point O du centre de gravité de l'arc ACB.

En appelant θ le demi-angle au centre, on transforme la formule en la suivante :

$$y_1 = \frac{R \sin\theta}{\theta},$$

et, appliquée à la demi-circonférence AHB, elle donne

$$\mathrm{IG} = \frac{\mathrm{AB}}{\pi} = \frac{2l\sin\alpha}{\pi},$$

équation dont nous avons fait usage (¹).

IV. Supposons en second lieu que l'angle α ne soit pas infiniment petit, mais qu'il soit assez petit pour qu'on puisse poser

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6},$$

à titre d'approximation. Les limites de PR sont alors différentes, mais d'une petite quantité, et l'on pourra substituer à PR variable une valeur constante, que nous prendrons égale à

$$\mathrm{PR} = 2l\left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right);$$

cela revient à poser

$$\mathrm{PR} = \frac{\mathrm{AA'} + 2\mathrm{IG}}{3},$$

en affectant du coefficient 2 la plus grande limite, maximum de la variable. Il vient alors, en refaisant les calculs,

$$(2)\qquad v = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{\mathrm{PH}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{3}}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{\mathrm{PH}}{1 - \frac{\alpha^2}{6}},$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{2l\sin\alpha}{\pi\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{2l\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)}{1 - \frac{\alpha^2}{6}} \\ &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,2l\alpha. \end{aligned}\right.$$

(¹) Cette démonstration a été donnée dans notre *Mécanique* (t. II, § [illegible], IVᵉ édit., Hachette).

et, comme $2l\alpha$ est la longueur de l'arc parcouru ACB, on a

$$(4) \qquad t = \frac{2l\alpha}{u} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

c'est-à-dire la formule trouvée pour α infiniment petit, étendue aux petits arcs α.

[K2e]

SUR LE CERCLE PÉDAL;

Par M. G. FONTENÉ.

1. Soit un triangle ABC. Le cercle pédal d'un point S (cercle circonscrit au triangle pédal de ce point) passe au centre K de l'hyperbole équilatère ABCS (*Nouv. Ann.*, 1905, p. 414). Deux points inverses S et S' ont même cercle pédal; celui-ci est rencontré par le cercle des neuf points du triangle ABC en deux points K et K', qui sont les centres des deux hyperboles équilatères ABCS, ABCS'; on peut remarquer que ces deux courbes sont les transformées par inversion des deux droites OS', OS, en appelant O le centre du cercle ABC.

Soit DEF le triangle pédal relatif au point S; soient M, N, P les milieux des côtés du triangle ABC; si a, b, c sont respectivement les intersections des droites NP et EF, PM et FD, MN et DE, *les trois droites* Da, Eb, Fc *concourent au point* K'. Ce point K' doit être considéré ici comme étant le centre de l'hyperbole équilatère qui est la transformée par inversion de la droite OS.

Ce théorème, dont on trouvera plus loin une démonstration analytique, donne la solution de la question 2021 : le quadrangle DEFK étant inscrit au cercle pédal, son triangle diagonal *abc* est conjugué par rapport à ce cercle. La démonstration géométrique semble devoir être assez difficile ; je n'ai rien trouvé.

Lorsque la droite SS' passe au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, les deux points K et K' sont confondus, et le cercle pédal est tangent au cercle des neuf points (*Nouv. Ann.*, 1903, p. 504) ; on a alors une extension de la construction donnée par Hamilton pour le point de contact K du cercle inscrit avec le cercle des neuf points.

2. Je démontrerai le théorème énoncé en vérifiant que les trois droites DE, MN, FK' sont concourantes. Prenons comme triangle de référence le triangle ABC, et soient p, q, r les coordonnées du point S. L'équation de l'hyperbole équilatère ABCS, déduite de celle de la droite OS, est

$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0,$$

sous les conditions

$$\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C = 0,$$
$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} + \frac{\gamma}{r} = 0.$$

Les coordonnées du centre K' de cette courbe sont, d'après un calcul facile,

$$x_1 = \alpha(\beta \sin B + \gamma \sin C - \alpha \sin A), \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

comme on a

$$\frac{\alpha}{q \cos C - r \cos B} = \frac{\beta}{r \cos A - p \cos C} = \frac{\gamma}{p \cos B - q \cos A},$$

on obtient, sauf un changement de signes,

$$x_0 = (q\cos C - r\cos B)[q\sin B - r\sin C + p\sin(B - C)],$$
$$y_0 = (r\cos A - p\cos C)[r\sin C - p\sin A + q\sin(C - A)],$$
$$z_0 = (p\cos B - q\cos A)[p\sin A - q\sin B + r\sin(A - B)].$$

La droite SF ayant pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$z(p\cos A - q\cos B) - x(r\cos A + q) - y(r\cos B + p) = 0,$$

l'équation de FK' est

$$\frac{x(r\cos A + q) - y(r\cos B + p)}{x_0(r\cos A + q) - y_0(r\cos B + p)} = \frac{z}{z_0}.$$

Cette équation peut être simplifiée. Lorsque la droite OS est perpendiculaire sur AB, de sorte que l'on a

$$p\sin A - q\sin B + r\sin(A - B) = 0,$$

l'hyperbole équilatère ABCS' qui en est la transformée par inversion a son centre au milieu de AB, puisque l'on a alors $z_0 = 0$; les points F et K' sont confondus, et la droite FK' n'est pas déterminée. Il suit de là que le dénominateur du premier membre de l'équation ci-dessus, après qu'on y a remplacé x_0 et y_0 par leurs expressions en p, q, r, renferme en facteur la quantité

$$p\sin A - q\sin B + r\sin(A - B)$$

qui entre aussi dans l'expression de z_0; pour faire la division on ordonne par rapport à r, le terme en r^3 disparait au dividende, ce qui réduit le quotient à être de

la forme $Hr + K$, et le calcul des coefficients H et K, que l'on peut déterminer indépendamment l'un de l'autre, donne pour ce quotient

$$Q = r\sin C(p\sin B + q\sin A) - \cos C(p^2 + 2pq\cos C + q^2);$$

l'équation de FK' est donc

$$(\mathrm{FK}')\quad \frac{x(r\cos A + q) - y(r\cos B + p)}{Q} = \frac{z}{p\cos B - q\cos A}.$$

Les équations des droites SD et SE étant

$$x(q\cos B - r\cos C) + y(p\cos B - r) - z(p\cos C - q) = 0,$$

$$y(r\cos C - p\cos A) - z(q\cos C - p) - x(q\cos A - r) = 0,$$

l'équation de DE est

$$(\mathrm{DE})\qquad \frac{q\cos A - r}{q\cos C - p}x + \frac{p\cos B - r}{p\cos C - q}y - z = 0;$$

l'équation de MN est d'ailleurs

$$(\mathrm{MN})\qquad x\sin A + y\sin B - z\sin C = 0.$$

En écrivant que DE, MN, FK' sont concourantes, on a la condition suivante qui doit avoir lieu d'elle-même :

$$\begin{vmatrix} (q\cos A - r)(p\cos C - q) & (p\cos B - r)(q\cos C - p) & (p\cos C - q)(q\cos C - p) \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ (r\cos A - q)(p\cos B - q\cos A) & (r\cos B - p)(q\cos A - p\cos B) & Q \end{vmatrix}$$

or, si l'on additionne les éléments des deux lignes extrêmes, on obtient les éléments de la seconde ligne multipliés par les facteurs communs

$$qr\sin A + rp\sin B + pq\sin C;$$

le déterminant est donc bien égal à zéro.

[K2e]

NOTE AU SUJET DE L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

Par M. R. B.

Dans l'article précédent, M. Fontené établit par le calcul le théorème suivant :

Soient ABC *un triangle;* DEF *le triangle pédal d'un point* S *par rapport au triangle* ABC; M, N, P *les milieux des côtés du triangle* ABC; *a, b, c les intersections respectives des droites* NP *et* EF, PM *et* FD, MN *et* DE. *Les trois droites* D*a*, E*b*, F*c concourent en un point qui appartient au cercle* DEF *et au cercle* MNP.

Voici une démonstration géométrique et très élémentaire de cette élégante proposition :

Construisons le cercle ANP, comme l'indique la figure ci-après [1]. Il contient le point H, centre du cercle circonscrit à ABC et orthocentre du triangle MNP. Ce point H est, en outre, diamétralement opposé à A sur le cercle ANP. Appelons K_1 le second point où la droite SH rencontre le cercle ANP. Les points E, F, K_1, sommets d'angles droits dont les côtés passent par les points S et A, sont sur un cercle de diamètre SA. Ce même cercle contient aussi le point D_1, projection du point S sur la parallèle à BC menée par le point A (D_1 est symétrique de D par rapport à NP).

[1] C'est par hasard que la droite EF est tangente au cercle ANP.

Je dis *que les points* a, K_1, D_1 *sont en ligne droite.*

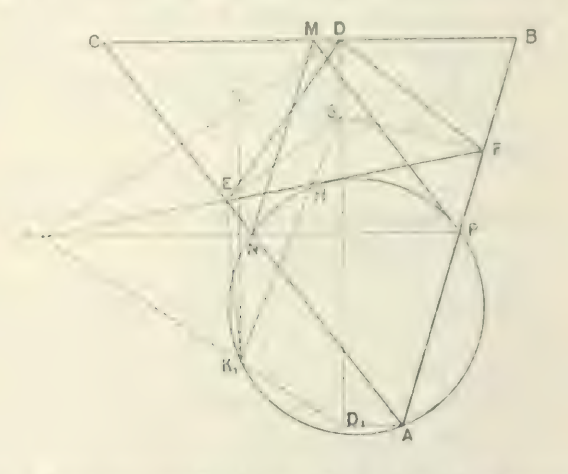
En effet, d'après une propriété bien connue du quadrilatère complet, le point K_1, qui appartient aux cercles ANP, AEF, appartient aussi au cercle aEN. On a donc

$$\widehat{aK_1E} = \widehat{aNE}.$$

D'autre part, le quadrilatère inscriptible SEK_1D_1 donne

$$\widehat{EK_1D_1} = \pi - \widehat{D_1SE} = \pi - \widehat{aNE},$$

puisque les deux angles D_1SE, aNE ont leurs côtés



deux à deux perpendiculaires. On a donc finalement

$$\widehat{aK_1E} = \pi - \widehat{EK_1D_1},$$

ce qui établit l'assertion faite plus haut.

Appelons enfin K le point symétrique de K_1 par rapport à AP; K est sur la droite aD et l'on a

$$aK . aD = aK_1 . aD_1 = aE . aF.$$

Ainsi, les points K, D, E, F sont sur un même cercle. D'autre part, le point K est évidemment sur le cercle MNP. On voit donc que la droite Da passe par l'un des points communs aux cercles DEF, MNP. Il en est de même des droites Eb, Fc, et *la symétrie exige que ce point d'intersection soit le même, quelle que soit la droite considérée* (*voir* plus loin).

Le théorème est ainsi établi, et l'on voit même que le point K reste fixe lorsque le point S décrit une droite ϖ passant par le centre H du cercle ABC : ce fait, signalé par M. Fontené, rend compte de l'existence d'un lieu du point K, lorsque S varie dans le plan. Si l'on se donne le point K sur le cercle MNP, on pourra construire les symétriques K_1, K_2, K_3, lesquels sont sur une même droite ϖ passant par l'orthocentre H du triangle MNP (Steiner); inversement, si l'on se donne la droite ϖ, on en déduira le point K, et l'on voit que l'existence de ce point, affirmée ci-dessus par raison de symétrie, peut s'établir par un raisonnement formel.

[K2e]

NOTE SUR LA GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE FEUERBACH;

PAR M. ÉMILE WEBER.

A propos de la très intéressante généralisation du théorème de Feuerbach, indiquée dans les *Nouvelles Annales* par M. Fontené, on peut faire les remarques suivantes :

1. Le lieu des points en ligne droite avec leur in-

verse triangulaire et avec le centre du cercle circonscrit O a pour équation en coordonnées trilinéaires normales :

$$(1)\qquad \sum \alpha^2(\beta\cos C - \gamma\cos B) = 0.$$

C'est une cubique circonscrite au triangle fondamental ABC et passant par les pieds des *syhauteurs* (droites joignant les sommets au centre O du cercle circonscrit).

2. Le cercle pédal d'un point quelconque P du cercle ABC est la droite de Simson de P. Si P est tel que son inverse P' (à l'infini) soit précisément le point à l'infini de la direction PO, cette droite de Simson sera, en vertu du théorème de M. Fontené, tangente au cercle d'Euler. Pour avoir tous les points P répondant à ces considérations, il faut chercher les points d'intersection de la cubique (1), avec le cercle circonscrit

$$\sum a\beta\gamma = 0.$$

Mais, reculant devant la complication des calculs à effectuer à cet effet, nous avons essayé de résoudre la question par la méthode géométrique. Soit donc P un des points cherchés ayant son inverse à l'infini sur PO. Le diamètre PO sera parallèle à l'isogonale AD de AP. Soit E le second point d'intersection de OP avec le cercle ABC. Nous désignons par x l'angle CAP. Il est alors facile de voir que

$$\text{arc AP} + \text{arc AB} + \text{arc BE} = 2\ \text{dr.},$$

$$\text{arc AP} = \text{arc AC} - \text{arc PC},$$

$$\text{arc BE} - \text{arc BD} = \tfrac{1}{2}\,\text{arc BE} = \text{arc PC} = \text{arc AP}.$$

On tire tout de suite de là

$$x = \frac{1\,\mathrm{dr.} - B - A}{3}.$$

On voit donc que cette question dépend de la trisection d'un angle. Réciproquement, *le problème de la trisection de l'angle peut se ramener à celui-ci :*

Déterminer les droites de Simson tangentes au cercle d'Euler.

[D1b]

SUR LA LIMITE DE $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, QUAND m AUGMENTE AU DELÀ DE TOUTE LIMITE;

Par M. V. JAMET.

Préoccupé par le désir d'atteindre au maximum de simplicité dans l'exposition de cette question toujours effrayante pour les débutants, je me suis aperçu qu'elle perdrait beaucoup de sa difficulté pour un élève qui connaîtrait préalablement le développement en série entière de $(1 - x)^{-m}$, au moins pour les valeurs entières et positives de m. Ce développement, on peut le faire dériver du théorème sur la différentiation des séries entières, appliqué $m - 1$ fois de suite au développement connu de $(1 - x)^{-1}$, savoir

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Mais procéder ainsi, ce serait simplement déplacer la difficulté, car le théorème invoqué présente, à mon avis,

des difficultés du même ordre que la recherche de la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. J'ai pensé, en conséquence, qu'il y avait intérêt à établir le développement de $(1+x)^m$, par un procédé qui suppose acquis un minimum de connaissances préalables, savoir le calcul algébrique, et les propriétés les plus élémentaires des séries.

1. Tout d'abord, on reconnaît que la série

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

est convergente, quel que soit m, pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$. Soit donc, pour une telle valeur de x, y_m la somme de cette série, et soit $y_{m,q}$ la somme de ses $q+1$ premiers termes. Par la multiplication des polynomes, on trouve

$$\begin{aligned}(1+x)y_{m,q} &= \left[1+\sum_{p=1}^{p=q}\left(\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!}+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{(p-1)!}\right)x^p\right]\\ &\quad+\frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{q!}x^{q+1}\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}(1+x)y_{m,q} &= \left(1+\sum_{p=1}^{p=q}\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-p+2)}{p!}x^p\right)\\ &\quad+\frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{q!}x^{q+1}.\end{aligned}$$

Mais, si le nombre q augmente au delà de toute limite, le dernier terme du second membre tend vers zéro, car il est égal au terme général d'une série dont

on reconnait aisément la convergence. On en conclut

$$\lim (1-x)y_m$$

$$= 1 + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(m-1)m(m+1)\ldots(m+p-2)}{p!} x^p,$$

c'est-à-dire

$$(1-x)y_m = 1 + \frac{m-1}{1}x + \frac{(m-1)m}{1.2}x^2$$
$$+ \frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

ou bien

(1) $$(1-x)y_m = y_{m-1}.$$

2. Supposons désormais que m soit un entier positif. Nous trouverons de même

(2) $$\left\{\begin{aligned} (1-x)y_{m-1} &= y_{m-2},\\ (1-x)y_{m-2} &= y_{m-3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (1-x)y_2 &= y_1. \end{aligned}\right.$$

Mais

$$y_1 = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

On en déduit

(3) $$(1-x)y_1 = 1.$$

En multipliant membre à membre les égalités (1), (2), (3), et supprimant, aux deux membres de l'égalité résultante, les facteurs communs $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, on trouve

$$(1-x)^m y_m = 1 \quad \text{ou bien} \quad y_m = (1-x)^{-m},$$

c'est-à-dire

$$(1-x)^{-m} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{p!}x^p + \ldots.$$

3. Dans cette égalité, établie pour toute valeur entière de m, faisons $x = \frac{1}{m}$. Nous trouvons

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot m^2} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{p!\, m^p} + \ldots.$$

Or le $(p+1)^{\text{ième}}$ terme de cette série, égal à

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 + \frac{p-1}{m}\right)}{p!},$$

est évidemment supérieur à $\frac{1}{p!}$, et l'on en conclut

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} > e.$$

4. D'autre part, le développement de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ par la formule du binome montre que le $(p+1)^{\text{ième}}$ terme de ce développement est égal à

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{3}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{p-1}{m}\right)}{p!}$$

et par conséquent inférieur à $\frac{1}{p!}$. On en conclut

$$(4) \qquad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e.$$

Si donc on veut démontrer que les nombres

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}$$

tendent l'un et l'autre vers e, quand m augmente sans limite, en prenant des valeurs entières et positives, il suffit de faire voir que leur différence tend vers zéro.

Or

$$(5)\qquad \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m} = \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m}.$$

En vertu de l'identité qui permet de décomposer $x^m - a^m$ en un produit de facteurs entiers, on trouve

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m} - \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} &= \frac{1}{m(m-1)}\left[\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\right.\\ &\quad \left. + \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-2}\left(1+\frac{1}{m}\right) + \ldots + \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}\right].\end{aligned}$$

On en conclut

$$\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m} - \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \frac{1}{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1};$$

et, en vertu des relations (4) et (5),

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} - \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \frac{e}{m-1},$$

ce qui démontre la proposition.

[F4b]

EXPRESSION DE $p\frac{u}{2}$ COMME QUOTIENT DE DEUX SÉRIES ENTIÈRES;

Par M. L. VESSOT KING.

On a, d'après une formule symétrique établie dans les *Nouvelles Annales* (mai 1904) par M. Humbert,

$$p\frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2-e_3)\varpi_1 u + e_2(e_3-e_1)\varpi_2 u + e_3(e_1-e_2)\varpi_3 u}{(e_2-e_3)\varpi_1 u + (e_3-e_1)\varpi_2 u + (e_1-e_2)\varpi_3 u},$$

ce qui peut s'écrire :

$$(1) \qquad p\frac{u}{\gamma} = \frac{\sum e_\alpha(e_\beta - e_\gamma)\sigma_\alpha u}{\sum (e_\beta - e_\gamma)\sigma_\alpha u},$$

il en résulte immédiatement une expression de $p\frac{u}{\gamma}$ sous la forme du quotient de deux séries.

Le développement des fonctions $\sigma_\alpha u$ ($\alpha = 1, 2, 3$) en série se fait d'après la formule

$$(2) \qquad \sigma_\alpha u = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (A_\nu + B_\nu . e_\alpha + C_\nu . e_\alpha^2)\frac{u^{2\nu}}{2\nu!}.$$

Les coefficients A_ν, B_ν, C_ν sont connus et s'obtiennent pour les diverses valeurs de ν au moyen de formules récurrentes.

Remplaçons dans la formule (1) $\sigma_\alpha u$ par son développement en série et remarquons d'abord que l'on a

$$\sum e_\alpha = 0, \qquad \sum (e_\beta - e_\gamma) = 0,$$
$$\sum e_\alpha(e_\beta - e_\gamma) = 0, \qquad \sum e_\alpha^2(e_\beta - e_\gamma) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2, 3).$$

Il en résulte, sans difficulté,

$$(3) \qquad p\frac{u}{\gamma} = \frac{\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} B_\nu \frac{u^{2\nu}}{2\nu!}}{\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu \frac{u^{2\nu}}{2\nu!}},$$

ou bien, après avoir substitué les valeurs de B_ν et

de C_r et après avoir simplifié le résultat,

$$p\frac{u}{\omega} = \frac{1}{u^2}\,\frac{1 + \frac{g_2}{2^4.3.5}u^4 + \frac{13\,g_3}{2^3.3.5.7}u^6 + \dots}{1 - \frac{g_2}{2^4.3.5}u^4 - \frac{g_3}{2^3.3.5.7}u^6 - \dots}.$$

Nous retrouvons la série ordinaire de $p\frac{u}{\omega}$ en développant l'expression de droite suivant les puissances de u.

[L²21b, R1e]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLOÏDE ORTHOGONAL ET SUR UN SYSTÈME ARTICULÉ;

PAR M. R. BRICARD.

---

1. Proposons-nous tout d'abord le problème suivant :

ABCD *étant un quadrilatère gauche, soient* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ *les perpendiculaires élevées des points* A, B, C, D, *respectivement aux plans* (DAB), (ABC), (BCD), (CDA). *A quelles conditions doit satisfaire le quadrilatère* ABCD *pour que les quatre droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ *appartiennent à une même hyperboloïde?*

Comme on va le voir, il se présente le fait remarquable que les conditions, qui seraient, *a priori*, au nombre de trois, se réduisent à *deux* distinctes, d'ailleurs bien simples : *le quadrilatère* ABCD *doit avoir ses côtés opposés égaux deux à deux.*

2. Prenons le plan (ABD) comme plan de la figure (*fig.* 1). La droite $A\alpha$ se projette orthogonalement sur

Fig. 1.



ce plan au point A, les droites $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ se projettent suivant des droites $B\beta_0$, $C_0\gamma_0$, $D\delta_0$, qui sont respectivement perpendiculaires à AB, BD, AD. Si les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ sont sur un même hyperboloïde, il existe une droite I, parallèle à $A\alpha$, qui rencontre $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$. Cela exige que les trois droites $B\beta_0$, $C_0\gamma_0$, $D\delta_0$ concourent en un même point E. Il revient au même de dire que le point C (de l'espace) et le point d'intersection E des droites $B_0\beta_0$ et $D_0\delta_0$ doivent avoir les projections orthogonales sur BD confondues en un même point e. Mais le point E est diamétralement opposé au point A sur le cercle qui passe par les points A, B, D. Le point e est donc symétrique, par rapport au milieu de BD, du point a, projection de A sur BD, et l'on a

$$Ba = eD, \qquad Be = aD;$$

d'où l'on conclut

$$\overline{AB}^2 - \overline{DA}^2 = \overline{Ba}^2 - \overline{aD}^2 = \overline{eD}^2 - \overline{Be}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2$$

ou

$$(1) \qquad \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2.$$

Réciproquement, si cette relation entre les longueurs des côtés du quadrilatère ABCD est vérifiée, il existe une droite parallèle à $A\alpha$, et rencontrant $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, et, à cause de la symétrie de la relation, une droite parallèle à $C\gamma$ et rencontrant $A\alpha$, $B\beta$, $D\delta$.

Il existera de même une droite parallèle à $D\delta$ et rencontrant $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, si la relation suivante est vérifiée :

$$(2) \qquad \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2.$$

Si les relations (1) et (2) sont simultanément satisfaites, on a

$$(3) \qquad AB = CD, \qquad BC = DA.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe quatre droites distinctes rencontrant $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, *c'est-à-dire pour que ces quatre droites appartiennent à un même hyperboloïde.* C'est le résultat annoncé au n° 1.

3. Soient ABCD un quadrilatère satisfaisant aux relations (3), et (H), l'hyperboloïde qui contient $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$. La figure constituée par ABCD et (H) dépend de $12 - 2 = 10$ paramètres. Donnons-nous, *a priori*, l'hyperboloïde (H), et cherchons à construire le quadrilatère ABCD de telle manière que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ soient des génératrices de (H). Il semblerait que le problème est simplement indéterminé, quel que soit (H), puisque nous imposons neuf conditions aux dix paramètres dont dépend la

figure. On va voir qu'en réalité, *l'hyperboloïde* (H) *doit satisfaire à une condition, et que, cette condition étant supposée satisfaite, le problème est doublement indéterminé.*

Il est tout d'abord bien évident que le quadrilatère ABCD admet un axe de symétrie (c'est la droite joignant le milieu des diagonales AC et BD) et que cet axe est un axe principal de l'hyperboloïde (H). Rapportons cet hyperboloïde à ses axes principaux et soit alors

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

son équation. Le quadrilatère ABCD doit être, d'après ce qu'on vient de dire, symétrique par rapport à l'un des axes de coordonnées. Supposons que cet axe soit Oz. Si l'on appelle (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des points A et B, celles des points C et D sont respectivement $(-x_1, -y_1, z_1)$ et $(-x_2, -y_2, z_2)$.

Le plan ABD a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ -x_2 & -y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & 0 & z_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

d'où l'on tire sans peine les équations de la droite $A\alpha$:

$$\frac{x - x_1}{y_2(z_1 - z_2)} = \frac{y - y_1}{-x_2(z_1 - z_2)} = \frac{z - z_1}{x_2 y_1 - x_1 y_2}.$$

Pour exprimer que la droite $A\alpha$ est sur (H), il suffit

d'écrire qu'un point quelconque de la droite $A\alpha$, dont les coordonnées sont

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda y_2(z_1 - z_2), \\ y &= y_1 - \lambda x_2(z_1 - z_2), \\ z &= z_1 + \lambda(x_2 y_1 - x_1 y_2), \end{aligned}$$

appartient à cette surface. On forme ainsi une équation du second degré en λ qui doit être identiquement satisfaite.

Il nous suffira de retenir la condition obtenue en annulant le coefficient du terme en λ.

On trouve ainsi

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & A x_1 y_2(z_1 - z_2) - B x_2 y_1(z_1 - z_2) \\ & \qquad + C z_1(x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0. \end{aligned} \right.$$

On trouvera une condition analogue en écrivant que $B\beta$ est sur (H). Il suffit de permuter les indices 1 et 2, et l'on obtient

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & A x_2 y_1(z_2 - z_1) - B x_1 y_2(z_2 - z_1) \\ & \qquad + C z_2(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0; \end{aligned} \right.$$

d'où, en ajoutant les équations (1) et (2),

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)(z_1 - z_2)(A + B - C) = 0.$$

Les deux premiers facteurs de la relation précédente ne sont pas nuls, sans quoi le quadrilatère ABCD serait dans un plan, soit passant par Oz, soit parallèle à xOy. On doit donc avoir

$$(3) \qquad A + B - C = 0.$$

Ce qui montre bien que l'hyperboloïde (H) n'est pas quelconque : la condition (3), de forme bien connue,

exprime qu'il est *orthogonal*, c'est-à-dire qu'il a des génératrices et des plans cycliques perpendiculaires [1].

4. Réciproquement, soit (H) un hyperboloïde orthogonal. Je dis *que l'on peut construire une double infinité de quadrilatères* ABCD, *tels que les perpendiculaires* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, *menées des sommets* A, B, C, D *du quadrilatère, respectivement aux plans* (DAB), (ABC), (BCD), (CDA), *soient des génératrices de même système de* (H).

Ce théorème peut être considéré comme résultant du compte de paramètres, fait au début du n° 3. Mais on obtient une démonstration plus rigoureuse et plus instructive par des considérations d'un ordre différent.

5. Dans ce qui suit, je considérerai un hyperboloïde (H) quelconque, mais distinct d'un paraboloïde; je dirai, pour abréger, que *les génératrices de* (H) *sont* (1) *ou* (2) suivant qu'elles appartiennent à un système ou à l'autre.

Soient G une génératrice (1) fixe, Γ et Γ′ deux génératrices (1) variables, telles que les perpendiculaires communes à G et à Γ d'une part, à G et à Γ′ de l'autre, aient leurs pieds sur G confondus. Il existe entre Γ et Γ′ une correspondance dont nous allons chercher la nature.

La perpendiculaire commune à G et à Γ engendre, comme l'on sait, un *cylindroïde* ou *conoïde de*

---

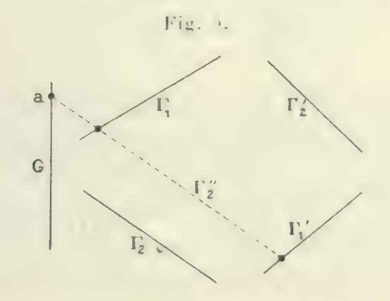
(1) D'une façon plus précise, sur les six plans cycliques d'un hyperboloïde orthogonal, il y en a *deux* qui sont perpendiculaires à des génératrices de la surface. Ces deux plans, supposés diamétraux, se coupent suivant un axe principal. Il faudra toujours entendre, dans ce qui suit, pour *axe* de l'hyperboloïde, l'axe dont il s'agit.

Plücker (P), dont G est la droite double. Donnons-nous Γ, et soit X la perpendiculaire commune à G et à Γ. X ne peut être perpendiculaire commune à G et à aucune génératrice (1) autre que Γ, sans quoi (H) aurait trois génératrices parallèles à un même plan, ce qui contredirait l'hypothèse faite que (H) n'est pas un paraboloïde. Mais, par le point où X rencontre G, il passe une autre génératrice X′ du cylindroïde (P), et X′ est perpendiculaire commune à G et à une seule génératrice (1) Γ′.

La correspondance entre Γ et Γ′ est donc biunivoque; comme elle est, en outre, évidemment symétrique, on voit *que* Γ *et* Γ′ *sont conjuguées dans une involution* ($\mathfrak{J}$).

Il est aisé de définir l'involution ($\mathfrak{J}$) par deux couples particuliers de génératrices conjuguées (Γ, Γ′): construisons (*fig.* 2) les deux génératrices (1) Γ_1 et Γ_2

Fig. 2.

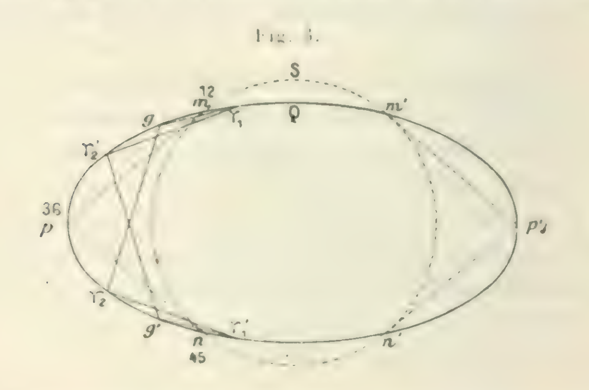


qui sont perpendiculaires à G. Il existe une génératrice (1) Γ'_2, autre que G, perpendiculaire à Γ_1, et une génératrice (1) Γ'_1, autre que G, perpendiculaire à Γ_2. Soit enfin Γ''_2 la génératrice (2) parallèle à Γ_2; Γ''_2 est la perpendiculaire commune à G et à Γ'_1. Désignons par *a* le point où Γ''_2 rencontre G; comme G est perpendiculaire au plan (Γ_1, Γ_2), *a* est le pied sur G de la perpen-

diculaire commune à G et à Γ_1. On voit donc que Γ_1 et Γ'_1 sont conjuguées dans l'involution ($\mathfrak{J}$). De même Γ_2 et Γ'_2. Ainsi, *l'involution* ($\mathfrak{J}$) *est définie pour les deux couples de génératrices conjuguées* (Γ, Γ'_1) *et* (Γ_2, Γ'_2).

Cela établi, supposons que (H) est un hyperboloïde orthogonal, et représentons en Q sa trace sur le plan de l'infini (*fig.* 3). Représentons aussi en S l'ombilicale

Fig. 3.



et soient *m*, *n*, *m'*, *n'* les quatre points d'intersection de S et de Q; puisque (H) est orthogonal, deux des cordes communes à ces deux coniques ont leurs pôles, par rapport à S, sur Q; par exemple, les tangentes à S aux points *m* et *n* vont concorder en *p* sur Q, et les tangentes à S aux points *m'* et *n'* vont concorder en *p'* sur Q.

On peut considérer le contour *mpn* comme constituant *un hexagone dégénéré, inscrit à* Q, *et dont les sommets consécutifs sont conjugués par rapport à* S; les sommets de cet hexagone sont, dans l'ordre, les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, disposés comme le montre la figure.

Il existe donc, en vertu d'un théorème connu, *une*

infinité d'hexagones inscrits à Q et dont les sommets consécutifs sont conjugués par rapport à S [1]. *Soit* $g\gamma_1\gamma'_2 g'\gamma'_1\gamma_2$ un tel hexagone. Ses sommets sont les traces, sur le plan de l'infini, de génératrices (1) de (H), que nous appellerons respectivement G, Γ_1, Γ'_2, G', Γ'_1, Γ_2. (G, Γ_1), (Γ_1, Γ'_2), . . . , (Γ_2, G) sont des couples de génératrices rectangulaires.

On voit donc que deux génératrices, conjuguées dans l'involution ($\mathfrak{J}$) définie plus haut, ont pour traces sur le plan de l'infini deux points de Q, conjugués dans l'involution (i) définie sur cette conique par les couples de points (γ_1, γ'_1) et (γ_2, γ'_2). D'autre part, quand on fait varier l'hexagone $g\gamma_1\gamma'_2 g'\gamma'_1\gamma_2$, on sait que deux sommets opposés de cet hexagone sont conjugués dans une involution définie, on le reconnaît immédiatement, par les couples (m, n), (m', n'). L'involution (i) se confond donc avec celle-là. Par conséquent, *l'involution* ($\mathfrak{J}$) *ne dépend pas de la génératrice* G. Deux génératrices conjuguées dans cette involution ont leurs traces sur le plan de l'infini en ligne droite avec le point de rencontre de mn et de $m'n'$, ce qui revient à dire que ces génératrices sont symétriques par rapport à l'axe de l'hyperboloïde.

Nous sommes donc parvenus au théorème suivant :

Soient (H) *un hyperboloïde orthogonal*, G, Γ *et* Γ' *trois génératrices de même système de cet hyperbo-*

---

[1] mpn peut aussi être considéré comme un quadrilatère dégénéré inscrit à Q et circonscrit à S. On peut donc énoncer le théorème suivant (qui a sans doute été déjà remarqué) :

Deux coniques Q et S doivent satisfaire aux mêmes conditions pour qu'il y ait des quadrilatères inscrits à Q et circonscrits à S, et pour qu'il y ait des hexagones inscrits à Q et ayant leurs sommets consécutifs conjugués par rapport à S.

loïde, Γ et Γ′ étant symétriques par rapport à l'axe de la surface. Les perpendiculaires communes à G et Γ d'une part, à G et à Γ′ de l'autre, ont leurs pieds sur G confondus.

La réciproque énoncée au nº 4 s'en déduit immédiatement.

6. Je vais maintenant montrer que les résultats précédents conduisent à la connaissance d'un système articulé, très intéressant, découvert par G.-T. Bennett (¹), et retrouvé indépendamment par M. Émile Borel (²).

Soient toujours ABCD un quadrilatère gauche à côtés opposés égaux, $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ les perpendiculaires élevées des sommets A, B, C, D aux plans (DAB), (ABC), (BCD), (CDA). Considérons les droites $B\beta$ et $C\gamma$ comme formant une figure de grandeur invariable. Puisque $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ sont sur un même hyperboloïde, on peut donner à la figure ($B\beta$, $C\gamma$) un déplacement infiniment petit, tel que les droites $B\beta$ et $C\gamma$ aient respectivement $A\alpha$ et $D\delta$ pour droites conjuguées dans le complexe linéaire attaché à ce déplacement infiniment petit. Autrement dit, dans le déplacement, $B\beta$ tourne autour de $A\alpha$, $C\gamma$ tourne autour de $D\delta$. Nous pouvons encore donner à ce résultat l'expression suivante : On peut déformer infiniment peu la figure ($A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$), ($A\alpha$, $B\beta$), ($B\beta$, $C\gamma$), ($C\gamma$, $D\delta$), ($D\delta$, $A\alpha$) constituant quatre figures invariables.

Après cette déformation infiniment petite, ABCD est encore un quadrilatère à côtés opposés égaux ; donc

---

(¹) *Engineering* (décembre 1903, p. 777) : *A new Mechanism.*
(²) *Mémoires des savants étrangers* (t. XXXIII, nº 1, p. 261) : *Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques.*

$A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ sont encore sur un même hyperboloïde, et la figure peut recevoir une nouvelle déformation infiniment petite ; et ainsi de suite. Nous arrivons donc à cette conclusion que la figure est susceptible d'une déformation finie. Ainsi :

Soient ABCD *un quadrilatère gauche dont les côtés opposés sont égaux deux à deux, et* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ *les perpendiculaires menées des points* A, B, C, D, *respectivement aux plans* (DAB), (ABC), (BCD), (CDA). *On peut déformer le système, les couples de droites* ($A\alpha$, $B\beta$), ($B\beta$, $C\gamma$), ($C\gamma$, $D\delta$), ($D\delta$, $A\alpha$) *formant quatre figures de grandeurs invariables.*

On a ainsi formé une *chaîne fermée de quatre couples rotoïdes*, pour employer le langage introduit par M. Kœnigs dans sa Théorie des mécanismes, c'est-à-dire un système articulé constitué de quatre corps rigides, articulés deux à deux suivant des charnières qui sont les quatre droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$.

7. On peut d'ailleurs donner une démonstration directe bien simple de la déformabilité du système en question : tout revient à démontrer, on le voit tout de suite, que le quadrilatère ABCD peut être déformé de telle manière que ses *dièdres* restent tous de grandeurs constantes (j'appelle, par exemple, *dièdre* $\widehat{AB}$ *du quadrilatère*, celui que forment les deux plans (DAB), (ABC).

Le quadrilatère ABCD peut être évidemment déformé de telle manière que le dièdre $\widehat{AB}$ reste de grandeur constante (puisque ce quadrilatère possède deux paramètres de déformation). Je vais montrer *que tous ses autres dièdres restent aussi de grandeurs constantes.*

On a en effet (*voir* la *fig.* 1), dans le trièdre BACD,

$$\frac{\sin \widehat{BC}}{\sin \widehat{BA}} = \frac{\sin \widehat{ABD}}{\sin \widehat{CBD}}.$$

Mais les deux triangles ABD, CBD sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. On a donc

$$\widehat{CBD} = \widehat{ADB}.$$

Donc

$$\frac{\sin \widehat{BC}}{\sin \widehat{BA}} = \frac{\sin \widehat{ABD}}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{AD}{AB}$$

ou

$$\sin \widehat{BC} = \frac{AD}{AB} \sin \widehat{BA},$$

ce qui établit bien la constante du dièdre BC.

On vérifiera de même que les autres dièdres du quadrilatère sont de grandeurs constantes.

CORRESPONDANCE.

M. **P. Montel.** — Vous avez publié dans les *Nouvelles Annales* de l'an dernier un élégant article de M. Tresse établissant que les six conditions nécessaires à l'équilibre de tout système de points suffisent à assurer celui d'un corps solide : je vous envoie une autre solution de cette question qui ne suppose pas connues les propriétés du mouvement hélicoïdal tangent et peut, par conséquent, être introduite dans l'enseignement des classes de Mathématiques spéciales.

On démontre très simplement que tout déplacement d'un corps solide peut être obtenu par une translation suivie d'une rotation. Supposons que ce corps solide soit soumis à des forces extérieures formant un système équivalent à o. Pour

un déplacement infiniment petit, le travail élémentaire de chaque force s'obtient en ajoutant les travaux relatifs à la translation et à la rotation. Dans la translation, le travail est égal au produit de la longueur du déplacement commun à tous les points par la projection de la force sur la direction de la translation. La somme de ces travaux pour tous les points du solide est nulle, car, pour les forces intérieures, les projections sont deux à deux opposées et, pour les forces extérieures, la somme de leurs projections est nulle. Dans la rotation, le travail est égal au produit de l'angle de rotation par le moment de la force par rapport à l'axe de rotation. La somme de ces travaux, pour tous les points du solide, est nulle, car, pour les forces intérieures, les moments sont deux à deux opposés et, pour les forces extérieures, la somme de leurs moments est nulle.

Il résulte de là que la différentielle de la force vive est nulle,

$$\frac{d}{dt}\sum mv^2 = 0, \qquad \sum mv^2 = \sum mv_0^2,$$

v_0 étant la vitesse initiale et v la vitesse au temps t du point matériel de masse m. Si le corps part du repos, $v_0 = 0$, la force vive est toujours nulle : c'est une somme de termes positifs dont chacun doit être nul. Donc les vitesses de tous les points du corps sont nulles et tous demeurent immobiles.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Lille.

Géométrie analytique et Analyse. — I. 1° Ox, Oy, Oz *étant trois axes rectangulaires, montrer que la surface développable dont les plans tangents sont représentés par l'équation*

$$x \sin t - y \cos t - z - at = 0,$$

où a désigne une longueur constante et t un paramètre

variable admet pour arête de rebroussement la courbe engendrée par le point de coordonnées

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = at, \end{cases}$$

qui rencontre l'axe Ox en un point A.

2° *Soient M un point quelconque de la courbe, P et Q les deux points de la tangente en M dont la distance à M est égale à la longueur de l'arc AM; trouver le lieu du point P et celui du point Q; rectifier les courbes obtenues.*

3° *L'une des courbes précédentes est située dans le plan xOy; chercher l'expression du rayon de courbure en un point quelconque et l'équation de la développée de cette courbe.*

4° *Vérifier que la courbe représentée par les équations (1) est tracée sur un cylindre de révolution d'axe Oz et sur la surface*

$$z = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x};$$

calculer l'aire de la portion de cette dernière surface comprise à l'intérieur du cylindre entre le plan xOy et le plan parallèle de cote $\frac{\pi}{2}a$.

II. *Trouver et intégrer l'équation différentielle des courbes planes telles que le segment intercepté sur une tangente quelconque par le point de contact et la projection d'un point fixe ait une longueur donnée.*

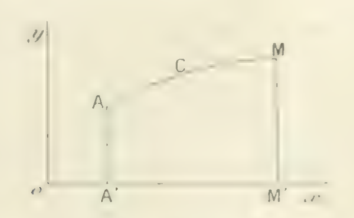
Mécanique. — I. *Définir l'accélération d'un point dans le cas général; déterminer ses composantes suivant les axes de coordonnées, puis ses composantes tangentielle et normale.*

II. *Étudier le mouvement d'un point M qui décrit un arc d'hélice de façon que sa projection N sur l'axe de cette hélice soit animée d'un mouvement vibratoire simple.*

(Novembre 1905.)

Lyon.

Épreuve écrite (extrait). — *Construire la courbe plane C, telle que l'aire comprise entre l'ordonnée fixe A'A, la*



courbe, l'ordonnée mobile M'M, l'axe des x, soit proportionnelle à l'arc AM.

Solution.

Plaçons A' à l'origine, en prenant AA' pour unité de longueur. Alors l'aire est égale à l'arc et il vient

$$x = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}),$$
$$y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}).$$

(Novembre 1904.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *On considère l'ellipse*

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi,$$

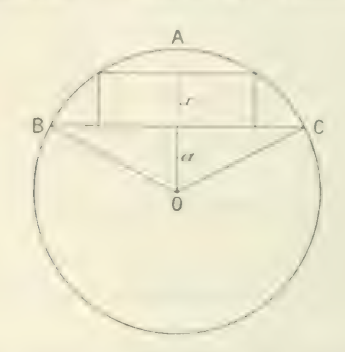
et la tangente en un point déterminé M de la courbe. Cette tangente rencontre les axes de coordonnées en deux points A et B, en lesquels on élève des perpendiculaires auxdits axes.

Ces perpendiculaires se coupent en un point N dont on demande le lieu lorsque M se déplace sur l'ellipse donnée.

On construira la courbe qui a, entre autres asymptotes, les asymptotes $x = a$ et $x = b$.

Considérant la branche de courbe qui se rapporte à ces deux dernières, on évaluera l'aire comprise entre cette branche, les asymptotes en question et une ordonnée d'abscisse quelconque plus grande que a. On évaluera aussi le volume engendré par l'aire précédente tournant autour de Ox.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Inscrire le rectangle de surface*



aussi grande que possible dans un segment de cercle donné ABC.

N. B. — *Le segment sera considéré comme déterminé par le rayon r de l'arc qui le limite, et par la distance a du centre* O *de cet arc à la base* BC.

On pourra prendre comme inconnue la hauteur x du rectangle. (Novembre 1905.)

Toulouse.

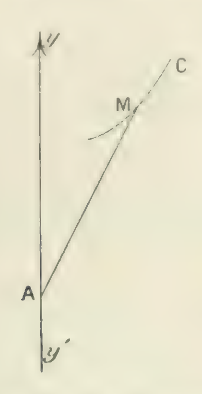
ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une courbe plane* (C) *est invariablement liée à un axe vertical y'y situé dans son plan, et tourne autour de cet axe avec une vitesse angulaire constante* ω.

Une tige homogène et pesante AM *de masse m et de longueur l est mobile dans le plan de la courbe* (C), *ses extrémités* A *et* M *étant assujetties à rester sur l'axe y'y et sur la courbe* (C). *On néglige les frottements.*

1° *Déterminer la résultante des actions de la force cen-*

trifuge sur la tige AM *et le point d'application de cette résultante, en supposant que la tige occupe une position fixe dans le plan de la courbe* (C), *pendant la rotation.*

2° *Déterminer la courbe* (C) *de manière que la tige soit*



en équilibre relatif pendant la rotation quelle que soit la position de l'extrémité M *sur la courbe* (C).

3° *Construire la courbe obtenue.*

Épreuve pratique. — *Dans un cercle, un arc de longueur* 3^{dm} *sous-tend une corde de* 2^{dm}. *Trouver le rayon du cercle au dixième de millimètre.* (Novembre 1905.)

CERTIFICAT D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Nancy.

Épreuve écrite. — I. *Énoncer et démontrer les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les deux fonctions* $\varphi(x, y)$ *et* $\psi(x, y)$ *pour que le système de coordonnées curvilignes défini par les équations*

$$\varphi(x, y) = u, \qquad \psi(x, y) = v$$

soit orthogonal et isotherme.

II. *Quelles valeurs faut-il donner à la constante m pour que l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$(2x^2 - x - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + 6x\frac{dy}{dx} + my = 0$$

soit méromorphe pour toutes les valeurs finies de x.

Vérifier que pour chacune de ces valeurs de m l'intégrale générale est une fonction rationnelle de x, et calculer cette fonction rationnelle. (Novembre 1905.)

CERTIFICAT D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Théorème de Mittag-Leffler sur la représentation d'une fonction analytique uniforme d'une variable complexe z n'admettant à distance finie que des pôles comme points singuliers.*

II. *Décomposer le premier membre de l'équation*

$$x^{[illegible]} - 1 = 0$$

en ses facteurs irréductibles. Effectuer la même décomposition pour l'équation transformée en

$$y = x + x^{-1},$$

et déterminer le groupe de substitutions de cette équation transformée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer à un millième près l'intégrale*

$$\int \frac{z\sqrt{\ }\ \text{arc tang}\sqrt{2+z}}{3-2z-4z^2-2z^3+z^4}\,dz.$$

étendue à la circonférence de centre z = 0 et de rayon 1; on donnera pour z = 0 aux racines carrées leurs valeurs arithmétiques et à l'arc tang la détermination comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. (Juillet 1905.)

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère les deux paraboloïdes*

$$x^2 - y^2 = 2az, \qquad x^2 + y^2 = -2az,$$

et les droites qui sont tangentes communes à ces deux surfaces. Déterminer les arêtes de rebroussement des développables engendrées par ces droites.

II. *Equations qui déterminent la surface minima ayant pour ligne géodésique la développée d'une parabole.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étudier les sections par les plans coordonnés et par les plans parallèles au plan des xy de la surface lieu des points dont les coordonnées x, y, z s'expriment de la manière suivante en fonction de deux paramètres u et v :*

$$x = u + \frac{u^3}{3} + uv^2,$$

$$y = v^3,$$

$$z = (u^2 - v^2)^2 - 2u^2 - 2v^2.$$

(Mars 1905.)

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'équation différentielle*

$$x + py + \frac{3ap}{1+p^2} = 0.$$

où l'on a posé $\frac{dy}{dx} = p$ et où a désigne un nombre donné positif :

1° Intégrer cette équation ;

2° Déterminer la solution telle que la courbe qui la représente admette l'axe des y pour tangente et construire cette courbe (on ne cherchera pas l'équation explicite de la courbe) ;

3° Cette courbe est fermée ; calculer le volume engendré par sa révolution autour de l'axe des y.

II. *On considère la courbe représentée en coordonnées rectangulaires $Oxyz$ par les équations*

$$y = x^2, \qquad z = \frac{2}{3}x^3.$$

1° Trouver le lieu des parallèles menées par l'origine aux tangentes successives à cette courbe et trouver l'enveloppe des plans menés par l'origine parallèlement aux plans osculateurs successifs ;

2° Calculer l'angle de la tangente en un point de la courbe avec la bissectrice de l'angle xOy ;

3° Déterminer les développantes de la courbe.

(Novembre 1905.)

Épreuve écrite. — I. P *et* Q *désignant deux fonctions données des deux variables indépendantes x et y, énoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $u(x, y)$ dont la différentielle totale soit égale à*

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Comment calcule-t-on cette fonction u ?

II. *Déterminer la fonction z des deux variables indépendantes x et y de manière :*

1° Que l'expression $z\,dx + z^2\,dy$ soit une différentielle totale exacte ;

2° Que, pour $y = 0$, la fonction z se réduise à $\sqrt{x}$.

La fonction z *une fois déterminée, intégrer la différentielle*

$$z\,dx + z^2\,dy.$$

III. *Soient* C *une courbe représentée par l'équation*

$$y = f(x),$$

P *le pied sur l'axe des* x *de l'ordonnée d'un point* M *de cette courbe, et* D *la parallèle menée par* P *à la tangente au point* M. *Cette droite* D *a une enveloppe.*

1° *Évaluer les coordonnées du point de contact* N *de la droite* D *avec son enveloppe;*

2° *Déterminer la courbe* C *de telle façon que l'ordonnée du point* N *soit égale aux deux tiers de l'ordonnée de centre de courbure de la courbe au point* M.

(Novembre 1905.)

CERTIFICAT D'ASTRONOMIE.

Poitiers.

Épreuve écrite. — *Aberration annuelle. Formules. Ellipse d'aberration. Aberration du Soleil.*

Épreuve pratique. — *Le* 25 *juin* 1905, *avant midi, on a trouvé :*

Hauteur du bord inférieur du Soleil..	53° 20′ 55″
Baromètre........................	762mm
Thermomètre......................	+ 22°
Latitude du lieu	46° 34′ 55″

Trouver l'heure. Tenir compte des variations de déclinaison.

(La *Connaissance des Temps* est mise à la disposition des candidats.) (Juillet 1905.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1652.

([illegible])

Trouver tous les systèmes de quatre nombres positifs a, b, c, d, tels que les dix nombres

$$a+b-1,\quad a+c-1,\quad a+d-1,$$
$$b+c-1,\quad b+d-1,\quad c+d-1,$$
$$2-b-c-d,\quad 2-c-d-a,$$
$$2-d-a-b,\quad 2-a-b-c$$

soient les inverses de nombres entiers.

(LEVAVASSEUR.)

SOLUTION

Par M. A. D[illegible].

On se trouve en présence du système d'équations

$$(1)\quad \begin{cases} a+b-1=x, & c+d-1=x_1, & 2-b-c-d=m,\\ a+c-1=y, & b+d-1=y_1, & 2-a-c-d=n,\\ a+d-1=z, & b+c-1=z_1, & 2-a-b-d=p,\\ & & 2-a-b-c=q, \end{cases}$$

dans lesquelles les seconds membres sont de la forme $\frac{1}{N}$, N étant entier.

Posant

$$(2)\qquad a+b+c+d-2=\alpha,$$

on a

$$(3)\qquad \begin{cases} a=m+\alpha, & c=p+\alpha,\\ b=n+\alpha, & d=q+\alpha, \end{cases}$$

$$(4)\qquad m+n+p+q-2=-3\alpha.$$

L'élimination de a, b, c, d donne les six relations suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & x + p + q = x_1 + m + n \\ & = y + n + q = y_1 + m + p \\ & = z + n + p = z_1 + m + q = 1 - \alpha. \end{aligned}\right.$$

On a encore les formules suivantes :

$$(6)\qquad x + x_1 = y + y_1 = z + z_1 = \alpha$$

et

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & x + p = y + n = z_1 + m = (1 - \alpha) - q, \\ & x + q = y_1 + m = z + n = (1 - \alpha) - p, \\ & x_1 + m = y + q = z + p = (1 - \alpha) - n, \\ & x_1 + n = y_1 + p = z_1 + q = (1 - \alpha) - m. \end{aligned}\right.$$

Si dans (5) on remplace α par l'une des valeurs tirées de (6), on a six formules ne renfermant chacune que quatre inconnues de la forme $\frac{1}{N}$:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & 2x + x_1 + p + q = 1, \\ & 2x_1 + x + m + n = 1, \\ & 2y + y_1 + n + q = 1, \\ & 2y_1 + y + m + p = 1, \\ & 2z + z_1 + n + p = 1, \\ & 2z_1 + z + m + q = 1. \end{aligned}\right.$$

La combinaison de chaque ligne des relations (7) avec (4) donne encore quatre relations analogues :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & x + y + z_1 + 2q = 1, \\ & x + y_1 + z + 2p = 1, \\ & x_1 + y + z + 2n = 1, \\ & x_1 + y_1 + z_1 + 2m = 1. \end{aligned}\right.$$

On peut enfin remarquer que la somme des dix inconnues est égale à 2 :

$$\Sigma x + \Sigma m = 2.$$

Les équations (8) forment ensemble le système des conditions à remplir.

Elles n'ont plus de solution lorsque chacune des inconnues est inférieure en valeur absolue à $\frac{1}{5}$.

Il en résulte un moyen de résoudre le système en donnant successivement à chaque inconnue les dix valeurs positives ou négatives $\frac{1}{N}$ pour lesquelles $|N| \leq 5$ et en recherchant dans chaque cas toutes les solutions possibles pour les autres inconnues.

Par raison de symétrie, il suffit d'opérer sur les deux inconnues m et x.

On peut rendre cette discussion plus facile en examinant séparément les cas suivants :

1° a, b, c, d ont des valeurs différentes;
2° Deux d'entre elles seulement sont égales : $a = b$;
3° $a = b$, $c = d$, a et c ayant des valeurs différentes;
4° $a = b = c \neq d$;
5° $a = b = c = d$.

1° *a, b, c, d ont des valeurs différentes.* — Il en est de même de m, n, p, q [formule (3)]. Dans le groupe des inconnues x, toutes les valeurs sont aussi différentes, mais il peut y avoir exception pour un seul des couples (x, x_1), (y, y_1) ou (z, z_1).

Cela résulte des formules (6) et (7).

2° $a = b$. — Comme conséquence des formules (3) et (7), on a

$$m = n, \qquad y = z_1, \qquad y_1 = z,$$

et les formules (8) se réduisent à

$$\begin{aligned} 2x + x_1 + p + q &= 1, \\ 2x_1 + x + 2m &= 1, \\ 2y + y_1 + m + q &= 1, \\ 2y_1 + y + m + p &= 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la symétrie n'est plus conservée et il ne suffit plus d'opérer sur les inconnues m et x. Mais la seconde des

équations ne contient plus que trois inconnues et c'est celle qu'on doit chercher à résoudre par la méthode indiquée en rejetant les solutions incompatibles avec les trois autres équations.

3° $a = b$, $c = d$. — On a

$$m = n, \qquad p = q, \qquad y = y_1 = z = z_1;$$

les formules (8) deviennent

$$\begin{aligned} 2x + x_1 + 2p &= 1, \\ 2x_1 + x + 2m &= 1, \\ 3y + m + p &= 1. \end{aligned}$$

4° $a = b = c \neq d$. — On a

$$\begin{gathered} m = n = p \neq q, \\ x = y = z_1, \\ x_1 = y_1 = z; \end{gathered}$$

les formules (8) deviennent

$$\begin{aligned} 2x + x_1 + m + q &= 1, \\ 2x_1 + x + 2m &= 1. \end{aligned}$$

5° $a = b = c = d$. — On a

$$m = n = p = q, \qquad x = x_1 = y = y_1 = z = z_1.$$

Il ne reste qu'une seule condition à remplir :

$$3x + 2m = 1.$$

On obtient ainsi les solutions suivantes, D étant le dénominateur commun aux quatre fractions *a*, *b*, *c*, *d* dont les numérateurs figurent sous chacune de ces quatre lettres :

I.

D.	*a*.	*b*.	*c*.	*d*.
6	1	2	3	6

II.

D.	$a = b$.	c.	d.	D.	$a = b$.	c.	d.
4	1	2	4	12	7	4	9
4	4	1	2	12	9	4	7
6	6	1	2	12	5	8	10
6	6	2	3	12	8	2	10
6	6	3	4	12	7	6	9
6	2	3	7	12	7	6	8
8	3	2	7	12	8	6	7
10	6	3	9	15	9	7	11
12	9	2	7	18	10	7	17
12	7	4	11	20	15	6	9
12	9	4	5	24	15	10	17

III.

D.	$a = b$.	$c = d$.	D.	$a = b$.	$c = d$.
3	1	3	12	5	8
4	1	4	12	7	9
8	3	6	12	7	8

IV.

D.	$a = b = c$.	d.	D.	$a = b = c$.	d.
3	1	2	12	9	5
3	1	3	12	9	4
4	3	0	12	9	2
6	2	7	12	7	6
6	2	3	12	7	9
8	5	2	12	7	8
8	5	7	15	9	7
8	6	3	15	9	11
8	3	4	18	10	7
9	3	7	18	10	17
10	6	3	20	15	9
10	6	9	20	15	6
12	7	1	24	15	10
12	9	7	24	15	17
12	7	11			

V.

D.	$a+b+c+d.$	D.	$a+b+c+d.$
3	1	8	[illegible]
4	3	9	5
5	3	12	7

Il faut enfin ajouter une solution, dépendant d'un entier arbitraire :

D.	$a = b = c.$	$d.$
k	k	1

(k entier positif quelconque).

Cette solution rentre, en général, dans le quatrième cas, et exceptionnellement dans le cinquième (pour $k = 1$).

Le problème proposé admet en tout

$$1 + 22 + 6 + 29 + 6 + 1 = 65 \text{ solutions.}$$

2022.

(1905, p. [illegible]).

Soient a, b, c trois coefficients consécutifs quelconques d'une équation algébrique à coefficients réels, dont toutes les racines sont réelles; on demande de démontrer qu'il est impossible d'avoir

$$b^2(2b^2 - 3ac)^2 < a^3(4c^3 - 3ab^2).$$

(Solon Chassiotis.)

SOLUTION

Par l'Auteur.

Soit d le coefficient qui vient après c. On a, d'après un théorème de Catalan,

$$(1) \qquad (ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) \leq 0$$

ou, en ordonnant par rapport à d,

$$(2) \qquad a^2d^2 + 2b(2b^2 - 3ac)d + a(4c^3 - 3ab^2) \leq 0.$$

Par hypothèse, les coefficients de l'équation proposée sont réels; le premier membre de l'inégalité (2) a donc des solu-

tions réelles en d et jamais d'imaginaires, donc il est impossible que l'on ait

$$b^2(2b^3 - 3ac)^2 - a^2(4c^3 - 3ab^2)^2 < 0$$

ou

$$b^2(2b^3 - 3ac)^2 < a^2(4c^3 - 3ab^2)^2. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

QUESTIONS.

2035. Soient ABC, A'B'C' deux triangles. Si les droites AA', BB', CC' rencontrent respectivement les côtés BC, CA, AB du premier triangle en trois points situés sur une même droite, les droites qui joignent les sommets A', B', C' du second triangle aux points de rencontre respectifs des côtés BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B' concourent en un même point. (R. B.)

2036. Soient ABC un triangle, O et I les centres des cercles circonscrit et inscrit à ce triangle, B' et C' les milieux des côtés AC et AB. La droite symétrique de OI par rapport à la droite B'C' passe par le point de contact du cercle des neuf points du triangle ABC et du cercle inscrit à ce même triangle. (R. B.)

2037. Soit ABCD un tétraèdre orthocentrique dont l'orthocentre est H. Si un point M est tel que ses projections sur les plans des quatre faces du tétraèdre soient dans un même plan, ce plan partage le segment MH dans le rapport de 1 à 2.

(G. Fontené.)

ERRATA.

3e série, Tome V, page [illegible], lignes 15 et 16, *au lieu de* : ρ et τ le rayon de courbure et la torsion, *lire* : ρ et τ les rayons de courbure et de torsion.

Page [illegible], formule (9), *au lieu de* $C = \dfrac{l^2 \cos^4\theta - a}{l \cos^3 \sin\theta}$, *lire* :

$$C = \frac{l^2 \cos^4\theta - a}{l^2 \cos^3\theta \sin\theta}.$$

[R6a]

SUR LA MISE EN ÉQUATION DES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE;

Par M. HADAMARD.

Supposons qu'on ait, en appliquant un certain nombre des théorèmes généraux de la Dynamique, écrit, pour un problème déterminé de Mécanique rationnelle, des équations en nombre n égal à celui des paramètres qu'il s'agit d'exprimer en fonction du temps.

Ces équations sont-elles bien distinctes entre elles? sont-elles *les* équations du mouvement? Autrement dit, tout système de fonctions du temps qui satisfera à ces équations représentera-t-il par cela même un mouvement possible du système, une solution du problème posé?

En fait, un peu d'attention suffit en général à reconnaître s'il en est ou non ainsi.

Il n'est peut-être pas inutile, cependant, de noter les services que peut rendre à cet égard, dans l'enseignement, la remarque suivante, bien connue en elle-même :

On sait que toutes les équations de la Dynamique peuvent être considérées comme déduites de l'équation dite *générale*, celle qui résulte de la combinaison du principe de d'Alembert avec celui des vitesses virtuelles.

Cette dernière équation représente, d'une façon entièrement adéquate, l'ensemble des conditions aux-

quelles doit satisfaire le mouvement : elle exprime la condition nécessaire et suffisante d'équilibre entre les forces réellement existantes et les forces d'inertie.

Toute équation du problème s'obtiendra en prenant, pour le déplacement virtuel qui figure dans l'équation générale, l'un quelconque de ceux qui sont compatibles avec les liaisons.

La réponse à notre question se dégage maintenant d'elle-même.

On peut, avant même de les avoir formées, reconnaître si n équations déterminées du problème sont distinctes et suffisent à caractériser le mouvement du système.

Il faut et il suffit, pour cela, que les déplacements virtuels auxquels elles correspondent soient eux-mêmes indépendants (et, par conséquent, susceptibles de reproduire par leurs combinaisons linéaires le déplacement virtuel le plus général possible).

Ces déplacements virtuels peuvent d'ailleurs toujours être indiqués *a priori*. On sait que :

L'équation	de Lagrange relative à un des paramètres..	correspond au déplacement virtuel.	Variation de ce paramètre seul.
	des projections sur un axe................		Translation parallèle à cet axe.
	des moments par rapport à un axe.....		Rotation autour de cet axe.
	des forces vives.......		Déplacement réel du système.

Considérons, par exemple, le *mouvement de Poinsot*, c'est-à-dire le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, en l'absence de forces accélératrices.

Les équations d'Euler seront toujours indépendantes. Car elles résultent de l'application du théorème des moments des quantités de mouvement aux trois

axes d'inertie : or tout déplacement admissible du système se décompose en trois rotations autour de ces axes.

Il n'en aurait pas été de même avec les équations de Lagrange relatives aux trois angles d'Euler θ, φ, ψ. Car, lorsque l'angle θ de l'axe des z fixe avec l'axe des z mobile est nul ou égal à π, les déplacements dus à des variations infinitésimales de φ et de ψ ne sont plus indépendants : ils se réduisent à une seule et même rotation autour de la position commune des deux axes en question.

Soit encore le mouvement du *pendule sphérique*.

Les deux équations différentielles que l'on est conduit à écrire correspondent au théorème des aires et à celui des forces vives, c'est-à-dire à deux déplacements virtuels dont l'un est une rotation autour d'un axe vertical et l'autre le déplacement réel.

Le problème est ainsi correctement mis en équation dans le cas général.

Mais il cesse de l'être lorsque le mouvement instantané réel est une rotation autour de la verticale, c'est-à-dire lorsque $\frac{d\theta}{dt} = 0$, θ étant l'angle de cette verticale avec la tige du pendule.

Une difficulté de ce genre intervient, comme on sait, dans les principaux problèmes classiques de Mécanique rationnelle. L'intégration se ramène, en général, à celle d'une équation différentielle de la forme

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = f(\theta),$$

et une discussion spéciale est nécessaire lorsque la valeur commune des deux membres s'annule.

Ce qui précède montre qu'il en est forcément ainsi dès qu'on applique le théorème des forces vives. Ce

théorème est, en effet, substitué à l'une des n équations que l'on pourrait écrire sans son intervention (par exemple à l'une des n équations de Lagrange) : le déplacement réel est, dans ces conditions, substitué à un des n déplacements fondamentaux et les équations du problème sont en défaut lorsque ce déplacement réel est une combinaison des $n-1$ autres déplacements utilisés.

On peut remarquer que l'équation des forces vives est, parmi les équations classiques, la seule qui puisse devenir insuffisante pour des déterminations spéciales des *vitesses*.

Les autres équations peuvent, elles aussi, être exceptionnellement en défaut (comme nous l'avons vu à propos du mouvement de Poinsot) ; mais, si le théorème des forces vives n'intervient pas, la mise en équation, si elle est correcte en général, ne peut cesser de l'être que pour des *positions* spéciales du système.

[J2c]

SUR UNE QUESTION DE PROBABILITÉS;

Par M. A. DELTOUR.

1. Proposons-nous de chercher *la probabilité pour que, en tirant une à une, dans un ordre quelconque, les cartes d'un jeu ordinaire, il n'y ait jamais plus de deux cartes rouges consécutives, quelles que soient les séquences de noires.*

On sait que le nombre des permutations complètes de p objets A et de p objets B est $\frac{2p!}{(p!)^2}$.

Le problème revient donc à trouver le nombre de ces permutations dans lesquelles il n'y a pas plus de deux A consécutifs.

Le rapport des deux nombres donne la probabilité cherchée.

2. Une représentation graphique aidera le raisonnement.

A partir de l'origine de deux axes de coordonnées rectangulaires, je porte successivement les A en abscisses, les B en ordonnées, à raison d'une unité par lettre et toujours dans le sens positif, en suivant l'ordre des lettres dans la permutation donnée.

On obtient ainsi un tracé (*fig.* 1) qui se terminera

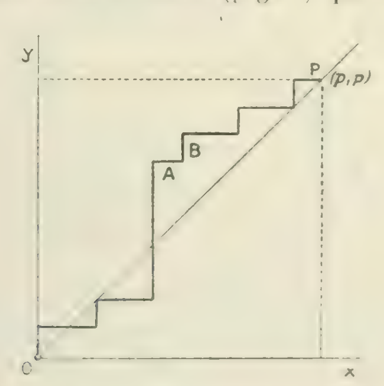


Fig. 1. — Tracé quelconque.

sur la bissectrice du premier quadrant, puisqu'il y a autant de A que de B, au point P(p, p), et qui restera tout entier enfermé dans le carré ayant pour diagonale la partie de la bissectrice qui joint ce point à l'origine.

Réciproquement tout tracé compris dans ce carré et satisfaisant aux conditions données représentera une des permutations dont il s'agit et le problème revient

à trouver le nombre des tracés possibles que je désignerai par a_p.

3. Ils se partagent en trois classes :

1° Ceux qui, commençant par un B sur l'axe des y, restent du même côté de la bissectrice, mais peuvent avoir avec celle-ci certains points communs (*fig.* 2) : soit b_p leur nombre ;

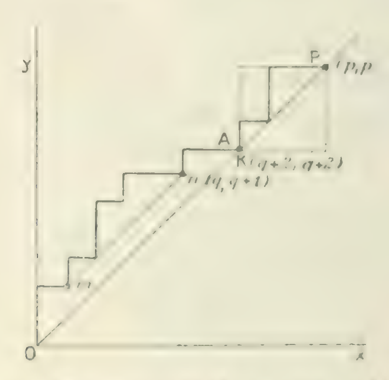


Fig. 2. — Permutation de la première catégorie.

2° Ceux qui, commençant par un B sur l'axe des y, traversent la bissectrice au moins en un point ;

3° Ceux qui commencent par un A sur l'axe des x.

4. Soit $K(q+1, q+1)$ (*fig.* 3) le premier point à partir de l'origine où un tracé de la seconde catégorie *traverse* la bissectrice. En ce point il y a deux A consécutifs : les termes précédant et suivant immédiatement sont des B.

Le tracé touche par conséquent la bissectrice aux points $m(q, q)$, $n(q+2, q+2)$.

Entre l'origine et le point m le tracé commence par

un B et reste du même côté de la bissectrice ; le nombre des tracés possibles est b_q.

Entre le second point n et l'extrémité P, le tracé commence soit par un B soit par un A ; c'est un des tracés compris dans le carré ayant pour sommets ces deux points ; leur nombre est a_{p-q+2}.

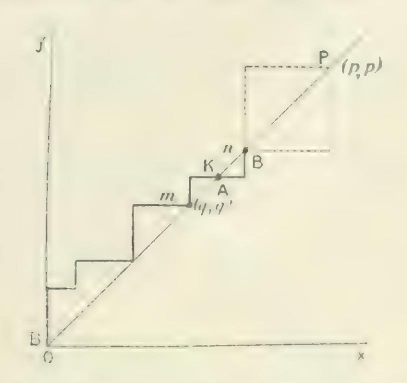


Fig. 3. — Permutation de la deuxième catégorie.

Le nombre total des tracés de la seconde catégorie est donc

$$\sum b_q a_{p-q+2} \quad (q \text{ variant de } 0 \text{ à } p-1),$$

en convenant de poser $a_0 = b_0 = 1$.

5. Dans le cas où la permutation appartient à la troisième catégorie, soit K$(q+2, q+2)$ (*fig.* 4) le premier point où le tracé *touche* la bissectrice.

Si ce point a pour coordonnées (1, 1), la permutation commence par AB. Le nombre des tracés correspondants à partir de (1, 1) est évidemment a_{p-1}.

Ce cas étant éliminé, la permutation commence par deux A suivis d'un B et arrive au point K par un B.

Abstraction faite de ces quatre lettres, le tracé a pour extrémités les deux points $m(2, 1)$, $n(q+2, q+1)$ situés sur une parallèle à la bissectrice et reste constamment du même côté de cette droite. On reconnaît facilement que ce tracé, pris en sens inverse et considéré comme ayant son origine au point n, remplit les mêmes conditions que ceux de la première catégorie.

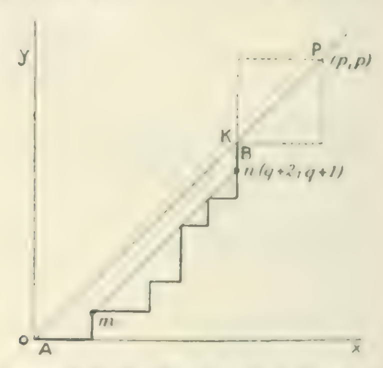


Fig. 4. — Permutation de la troisième catégorie.

Le nombre des tracés possibles entre les deux points extrêmes est donc b_q.

A partir du point K auquel on arrive par un B, le nombre des permutations est a_{p-q+2}.

Le nombre des permutations de la troisième catégorie est par conséquent

$$a_{p-1} - \sum b_q a_{p-q+2} \qquad (q \text{ variant de } 0 \text{ à } p-2).$$

Réunissant les trois résultats obtenus, on a la formule

$$(1) \qquad a_p = b_p + 2 \sum_{q=0}^{q=p-2} b_q a_{p-q+2} + a_{p-1}.$$

6. Reste maintenant à déterminer le nombre b_p des permutations de la première catégorie.

Soit $K(q+2, q+2)$ (*fig.* 2) le premier point où l'un des tracés *touche* la bissectrice. Si ce point a pour coordonnées (1, 1) la permutation commence par BA. Le nombre des tracés correspondants à partir de (1, 1) est b_{p-1}. Ce cas éliminé, la permutation commence par un B et arrive en K par BAA. Abstraction faite de ces quatre lettres, on a, comme précédemment, entre les deux points $m(0, 1)$, $n(q, q+1)$, situés sur une parallèle à la bissectrice, un tracé présentant les caractères de ceux de la première catégorie et dont le nombre est b_q.

A partir du point K jusqu'à la fin, le tracé conserve les caractères de ceux de la première catégorie dont le nombre est $b_{p-(q+2)}$.

On a par conséquent la formule suivante :

$$(2) \qquad b_p = b_{p-1} + \sum_{q=0}^{q=p-2} b_q b_{p-q-2}.$$

Les deux formules (1) et (2) permettent de calculer les valeurs des a_p.

7. Le Tableau ci-dessous donne les résultats qu'on obtient pour les premières valeurs de p.

p.	b_p.	a_p.
0	1	1
1	1	2
2	2	6
3	4	16
4	9	45
5	21	126
6	51	357
7	127	1016
8	323	2907

Ainsi, si l'on a seize cartes, huit rouges et huit noires,

rangées dans un ordre quelconque, la probabilité pour qu'il n'y ait pas plus de deux cartes rouges consécutives, les séquences de noires étant quelconques, est

$$\frac{2907}{\frac{16!}{8!\,8!}} = \frac{323}{10.11.13} = 0,225.$$

Lorsque p augmente, la probabilité diminue. Si l'on cherche la valeur de p pour laquelle elle se rapproche le plus de $\frac{1}{2}$, on trouve qu'elle a exactement cette valeur pour $p = 5$. Elle est, en effet,

$$\frac{126}{\frac{10!}{5!\,5!}} = \frac{1}{2}.$$

$[\mathrm{M}^1 1\mathrm{b}]$

SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES ALGÉBRIQUES;

Par MM. PERNOT et MOISSON,
Anciens élèves de l'École Polytechnique.

Pour étudier une courbe dont l'équation n'est pas résolue en y aux environs de l'un de ses points, auquel on a transporté l'origine, ou à l'infini, les méthodes généralement employées sont basées sur le calcul des infiniment petits. On est conduit, dans la pratique, à des calculs délicats, surtout lorsqu'on étudie une branche multiple singulière à l'origine, ou une branche parabolique multiple.

Cette étude se fait aisément lorsque x et y sont exprimés au moyen d'un paramètre, et très complètement lorsque la courbe est unicursale.

Les procédés que nous allons exposer consistent à remplacer la courbe proposée par une courbe dont l'équation est plus simple, ayant mêmes tangentes ou mêmes asymptotes au point considéré, et même position par rapport à ces droites. Dans la plupart des cas, la courbe auxiliaire peut être choisie unicursale et permet de tirer des conclusions immédiates; il en est ainsi lorsque la tangente étudiée est simple ou double.

Dans le cas d'une tangente multiple, on est conduit à la discussion d'une équation ordonnée suivant les puissances croissantes de $y - mx$, m étant le coefficient angulaire de la tangente.

En particulier, pour une équation de la forme

$$\Sigma x^{\alpha} y^{\beta} = 0,$$

on peut étudier de cette façon, par une méthode différente de celles de Puiseux et de Newton, les déterminations réelles de x et y aux environs de l'origine; les méthodes précitées restent préférables, dans le cas général, lorsqu'on veut déterminer plus exactement l'ordre de l'infiniment petit y ou x.

Nos procédés ont donc pour but d'obtenir le tracé correct d'une courbe aux environs d'un point; la même méthode s'applique à l'étude directe des branches infinies, sans avoir recours à la transformation homologique qui permettrait de les ramener à distance finie.

ÉTUDE D'UNE COURBE A L'ORIGINE.

Nous étudierons d'abord les deux cas d'une tangente simple et d'une tangente double, en discutant tous les cas qui peuvent se présenter.

1° *Tangente simple.* — Soit $y - mx = 0$ une tangente simple à l'origine, ce point étant d'ordre de mul-

tiplicité p. L'équation de la courbe pourra s'écrire

$$(y - mx)\psi(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \varphi_{p+2}(x, y) + \ldots = 0$$

ou

$$y - mx = -\frac{\varphi_{p+1}(x, y) + \varphi_{p+2}(x, y) + \ldots}{\psi(x, y)},$$

$\psi(x, y)$ étant un groupe homogène de degré $p - 1$ et $\varphi_{p+1}(x, y)$, $\varphi_{p+2}(x, y)$, ... étant également des groupes homogènes de degrés indiqués par l'indice. On a donc, en posant $\frac{y}{x} = t$,

$$y - mx = -\frac{x^2\varphi_{p+1}(1, t) + x^3\varphi_{p+2}(1, t) + \ldots}{\psi(1, t)}.$$

La position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par le signe de $y - mx$ quand x et y tendent vers o et t vers m. Si $\varphi_{p+1}(1, m) \neq 0$, le second membre qui est un polynome entier en x ordonné sera du signe de $-\frac{x^2\varphi_{p+1}(1, m)}{\psi(1, m)}$ pour x suffisamment petit; $y - mx$ aura également ce signe.

La courbe considérée a donc à l'origine même tangente et même position par rapport à sa tangente que la courbe unicursale

$$y - mx = -\frac{x^2\varphi_{p+1}(1, m)}{\psi(1, m)},$$

qui est une parabole.

La courbe proposée est d'un même côté par rapport à sa tangente, et du même côté que la courbe auxiliaire, dont l'équation sous forme entière est

$$(y - mx)\psi(1, m) + x^2\varphi_{p+1}(1, m) = 0.$$

Supposons maintenant que $\varphi_{p+1}(1, m) = 0$ et que le premier groupe qui ne s'annule pas pour $x = 1$, $y = m$ soit $\varphi_{p+r}(x, y)$. On met $y - mx$ en facteur dans tous

les termes qui précèdent $\varphi_{p+\lambda}$. Le même raisonnement montre que $y - mx$ est du signe de

$$\frac{-x^{\lambda+1}\varphi_{p+\lambda}(1, m)}{\psi(1, m)}$$

et que la courbe considérée peut être remplacée par la courbe unicursale

$$y - mx = -\frac{x^{\lambda+1}\varphi_{p+\lambda}(1, m)}{\psi(1, m)}.$$

On a un contact d'ordre λ; inflexion graphique si λ est pair, point méplat si λ est impair. La courbe auxiliaire est

$$(y - mx)\psi(1, m) + x^{\lambda+1}\varphi_{p+\lambda}(1, m) = 0.$$

Elle s'obtient immédiatement en remplaçant dans chacun des groupes homogènes ψ, φ_{p+1}, ... de la courbe donnée, y par mx, puis en conservant seulement le terme en $y - mx$ suivi du premier terme qui ne s'annule pas identiquement.

Pratiquement, on étudie directement la position par rapport à la courbe dont nous venons d'étudier les propriétés en tirant $y - mx$ de l'équation.

On garde au numérateur le coefficient de la plus faible puissance de x; on constate le signe du dénominateur quand t tend vers m; on en déduit le signe de $y - mx$. On place la courbe dans la région telle que $y - mx$ ait le signe voulu.

Exemple :

$$(y + x)(y - 2x) + 2y^2x - 8x^3 + x^4 - 5x^2y^2 - x^5 - y^5 = 0.$$

Considérons la tangente $y - 2x = 0$:

$$y - 2x = \frac{-x^4 - 5x^2y^2 + \ldots}{y + x + 2(y + 2x)x} = \frac{-x^4(1 + 5t^2) - \ldots}{x(1 + t) + 2x^2(2 + t)}.$$

Quand t tend vers 2, $y - 2x$ a le signe de $-x^3$. On en conclut qu'il y a inflexion graphique; du côté des x positifs, le facteur $y - 2x$ est positif; il est positif du côté des x négatifs.

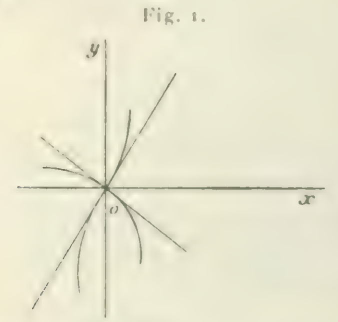
Pour l'autre tangente, on a

$$y + x = \frac{8x^3 - 7x^2 y + \dots}{y - 2x}.$$

Pour $y = -x$, $y + x$ a le signe de $-x^2$.

Donc la courbe est toujours du même côté de sa tangente (*fig.* 1).

Fig. 1.



2° *Tangente double.* — Considérons de même l'équation

$$(y - mx)^2 \psi_{p-2}(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \dots = 0.$$

a. Supposons d'abord $\varphi_{p+1}(1, m) \neq 0$. La tangente $y - mx = 0$ rencontre la courbe en $p + 1$ points seulement à l'origine, c'est-à-dire en un point de plus seulement qu'une sécante quelconque, et il ne peut y avoir qu'un arc de courbe d'un côté déterminé de la tangente. On a comme précédemment

$$(y - mx)^2 = -\frac{x^3 \varphi_{p+1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \dots}{\psi_{p-2}\left(1, \frac{y}{x}\right)}.$$

quand x et y tendent vers o et $t=\frac{y}{x}$ vers m, le second membre a le signe de $-\frac{x^3\varphi_{p-1}(1,m)}{\psi_{p-2}(1,m)}$. Les points de la courbe sont placés par rapport à la tangente double de la même façon que ceux de la cubique unicursale

$$(y-mx)^2=-\frac{x^3\varphi_{p-1}(1,m)}{\psi_{p-2}(1,m)};$$

il y a rebroussement de première espèce.

Pratiquement, on opère comme précédemment en tirant $(y-mx)^2$ pour avoir son signe quand x tend vers zéro et $\frac{y}{x}$ vers m, c'est-à-dire en remplaçant y par mx.

Exemple. — Soit la courbe

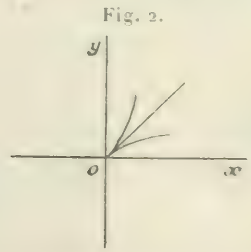
$$(y+x)(y-x)^2+y^4-4x^3y-x^5=0,$$

on a

$$(y-x)^2=\frac{4x^3y-y^4+\ldots}{y+x}.$$

En remplaçant y par x, on voit que le signe est celui de $\frac{3x^4}{2x}$, c'est-à-dire de x ; il faut donc que x soit positif pour que les points de la courbe soient réels ; il y a rebroussement de première espèce du côté des x positifs (*fig*. 2).

Fig. 2.



Remarque. — La méthode s'applique évidemment si $m=0$, c'est-à-dire si la tangente est l'axe Ox ; dans

le cas où m est infini, pour avoir la position par rapport à Oy, il suffit de tirer x pour une tangente simple, x^2 pour une tangente double, en remplaçant $\frac{x}{y}$ par zéro pour avoir le signe.

Soit

$$x^2 y - x^3 + x^4 - 2y^4 - x^5 = 0,$$

on a

$$x^2 = \frac{2y^4 - x^4 + \dots}{y - x} = y^3 \frac{\left(2 - \frac{x^4}{y^4}\right) - \dots}{\left(1 - \frac{x}{y}\right)},$$

x^2 a le signe de y : il y a donc rebroussement de première espèce du côté des y positifs (*fig.* 3).

Fig. 3.



4. Supposons maintenant

$$\varphi_{p+1}(1, m) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_{p+2}(1, m) \gtrless 0.$$

On peut alors poser

$$\varphi_{p+1}(x, y) = (y - mx)\psi_p(x, y).$$

L'équation de la courbe proposée devient

$$(y - mx)^2 \psi_{p-2}(x, y)$$
$$+ (y - mx)\psi_p(x, y) + \varphi_{p+2}(x, y) + \dots = 0$$

ou

$$(y - mx)^2 \psi_{p-2}(1, t) + x^2 (y - mx) \psi_p(1, t) + x^4 \varphi_{p+2}(1, t) + x^{q+2} \varphi_{p+q}(1, t) + \ldots = 0,$$

$\varphi_{p+q}(x, y)$ étant le premier groupe homogène qui suit $\varphi_{p+2}(x, y)$, ou encore

$$(y - mx - \alpha' x^2)(y - mx - \alpha'' x^2) + \frac{x^{q+2} \varphi_{p+q}(1, t)}{\psi_{p-2}(1, t)} + \ldots = 0,$$

α' et α'' étant les racines de l'équation

$$\alpha^2 \psi_{p-2}(1, t) + \alpha \psi_p(1, t) + \varphi_{p+2}(1, t) = 0$$

et ayant respectivement pour limites, quand x et y tendent vers 0 et t vers m, les racines a' et a'' de l'équation

$$(1) \qquad a^2 \psi_{p-2}(1, m) + a \psi_p(1, m) + \varphi_{p+2}(1, m) = 0.$$

Il existe alors des points de la courbe pour lesquels on a identiquement

$$y - mx - \alpha' x^2 = - \frac{x^{q+2} \varphi_{p+q}(1, t) + \ldots}{(y - mx - \alpha' x^2) \psi_{p-2}(1, t)}.$$

Par suite, le second membre est du signe de $\alpha' x^2$, qui est celui de $a' x^2$. Donc la parabole

$$y - mx = a' x^2$$

a même tangente et est placée par rapport à cette tangente du même côté que l'arc de courbe considérée. On peut donc encore remplacer la courbe par le faisceau des deux paraboles

$$(y - mx - a' x^2)(y - mx - a'' x^2) = 0,$$

la position de la courbe par rapport à chacune d'elles étant donnée par le signe de $\varphi_{p+q}(1, m)$ et de $\psi_{p-2}(1, m)$.

Si a' et a'' sont réels et de signe contraire, on a un contact double de part et d'autre de la tangente (*fig.* 4).

Fig. 4.



Si a' et a'' sont réels et de même signe, mais distincts, on a un contact double du même côté de la tangente (*fig.* 5).

Fig. 5.



Si a' et a'' sont deux racines imaginaires, on a un point double isolé.

Enfin, si a' et a'' sont deux racines égales, on a, à la limite,

$$(y - mx - ax^2)^2 = -\frac{x^{4+q}\varphi_{p+q}(1, m)}{\psi(1, m)},$$

qui est encore la courbe auxiliaire, $\varphi_{p+q}(1, t)$ étant la première fonction qui ne s'annule pas pour $t = m$. Si q est impair, on a un rebroussement de seconde espèce; si q est pair, point double isolé lorsque $\frac{\varphi_{p+q}(1, m)}{\psi(1, m)} > 0$

et contact double d'un même côté de la tangente lorsque $\frac{\varphi_{p+q}(1, m)}{\psi(1, m)} < 0$, chaque branche de courbe pouvant être remplacée par l'une des deux courbes explicites

$$y = mx + ax^2 \pm x^{\frac{q}{2}+1}\sqrt{-\frac{\varphi_{p+q}(1, m)}{\psi(1, m)}}.$$

La parabole $y = mx + ax^2$ sépare les deux branches de courbe, qui lui sont tangentes, l'une intérieurement et l'autre extérieurement.

La méthode étant ainsi théoriquement justifiée, voici comment on peut opérer dans la pratique. Soit la courbe

$$(y - x)^2(y^2 + x^2)$$
$$- 2(y - x)(y^4 + x^3y) + y^6 - 4x^7 + 2y^7 = 0;$$

on prend tous les termes contenant $y - x$ en facteur, plus les termes de plus bas degré qui suivent immédiatement

$$(y - x)^2(y^2 + x^2) - 2(y - x)(y^4 + x^3y) + y^6.$$

En remplaçant, dans les coefficients de $y - x$, y par x, et en divisant par x^2, on a l'équation

$$2(y - x)^2 - 4x^2(y - x) + x^4 = 0,$$

qui peut s'écrire en décomposant en carrés

$$(y - x - x^2)^2 - \frac{x^4}{2} = 0.$$

La position des branches de la courbe est donnée par celle des paraboles

$$y - x - x^2 = \pm\frac{x^2}{\sqrt{2}},$$

$$y - x = x^2\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

On voit que les deux branches sont du côté où $y - x$ est positif.

c. Supposons φ_{p+1} non identiquement nul, mais $\varphi_{p+1}(1, t)$ nul ainsi que $\varphi_{p+2}(1, t)$ et soit $\varphi_{p+q}(1, t)$ la première fonction ne s'annulant pas pour $t = m$. On a, comme précédemment,

$$(y - mx)^2\psi_{p-2}(1, t) + x^2(y - mx)\psi_p(1, t) + x^4\varphi_{p+2}(1, t) + \ldots + x^{q+2}\varphi_{p+q}(1, t) + \ldots = 0$$

ou, en posant $\alpha = -\frac{\psi_p(1, t)}{2\psi_{p-2}(1, t)}$, α ayant pour limite $a = -\frac{\psi_p(1, m)}{2\psi_{p-2}(1, m)}$,

$$(y - mx - \alpha x^2)^2 - x^4\left(\alpha^2 - \frac{\varphi_{p+2}(1, t)}{\psi_{p-2}(1, t)}\right) + \ldots + \frac{x^{q+2}\varphi_{p+q}(1, t)}{\psi_{p-2}(1, t)} + \ldots = 0$$

ou

$$(y - mx - \alpha x^2)^2 = \alpha^2 x^4 - \frac{x^4\varphi_{p+2}(1, t) + \ldots + x^{q+2}\varphi_{p+q}(1, t) + \ldots}{\psi_{p-2}(1, t)}.$$

Si $a \neq 0$, c'est-à-dire $\psi_p(1, m) \neq 0$ [en d'autres termes, si m est racine simple de $\varphi_{p+1}(1, t) = 0$], le second membre est du signe de $\alpha^2 x^4$, donc positif; il y a encore deux branches de courbe du même côté de la tangente. La courbe auxiliaire devient

$$(y - mx - ax^2)^2 = a^2x^4 - x^{q+2}\frac{\varphi_{p+q}(1, m)}{\psi_{p-2}(1, m)}$$

ou

$$y = mx + ax^2 \pm x^2\sqrt{a^2 - x^{q-2}\frac{\varphi_{p+q}(1, m)}{\psi_{p-2}(1, m)}}.$$

Si $a = 0$, c'est-à-dire si a est racine double de

$\varphi_{p+1}(1, t) = 0$, on aura

$$(y - mx)^2 [\psi_{p-2}(1, t) + x\psi_{p-1}(1, t)] + x^2(y - mx)\varphi_{p+2}(1, t) + \ldots,$$

et l'on sera, comme précédemment, ramené à l'étude d'une courbe auxiliaire de la forme

$$y = mx + a_1 x^3 \pm \sqrt{} \qquad \text{avec} \qquad a_1 = \frac{\varphi_{p+2}(1, m)}{2\psi_{p-2}(1, m)},$$

et ainsi de suite.

d. Enfin, supposons φ_{p+1} identiquement nul, ainsi que $\varphi_{p+2}, \ldots,$ jusqu'à φ_{p+r-1} inclusivement. On aura

$$(y - mx)^2 \psi_{p-2}(x, y) + \varphi_{p+r}(x, y) + \ldots = 0.$$

On obtient immédiatement, comme précédemment, la courbe auxiliaire

$$(y - mx)^2 = -\frac{x^{r+2}\varphi_{p+r}(1, m)}{\psi_{p-2}(1, m)},$$

en supposant $\varphi_{p+r}(1, m) \neq 0$.

Si r est impair, rebroussement de première espèce.

Si r est pair, point double isolé ou deux branches de part et d'autre de la tangente qu'on peut remplacer par les branches de la courbe :

$$y = mx \pm x^{\frac{r}{2}+1}\sqrt{-\frac{\varphi_{p+r}(1, m)}{\psi_{p-2}(1, m)}}.$$

e. Si $\varphi_{p+r}(1, m) = 0$, on a

$$\varphi_{p+r}(x, y) = (y - mx)\psi_{p+r-1}(x, y).$$

On est comme précédemment amené à considérer la courbe

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &(y - mx)^2 \psi_{p-2}(1, m) \\ &\quad + x^{r+1}(y - mx)\psi_{p+r-1}(1, m) \\ &\qquad + x^{r+\alpha+2}\varphi_{p+r+\alpha}(1, m) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si $\alpha = r$, on peut encore comme plus haut remplacer la courbe proposée par le faisceau de deux courbes unicursales de la forme

$$(y - mx - a'x^{r+1})(y - mx - a''x^{r+1}) = 0,$$

et si $\alpha > r$, par une courbe

$$(y - mx - ax^{r+1})^2 = a^2x^{2r+1} - Ax^{2r+1+q};$$

résultats analogues à ceux trouvés précédemment.

Si $\alpha < r$, soit $\alpha = r - h$; l'équation (2) est de la forme

$$(y - mx)^2 + 2Ax^{r+1}(y - mx) + Bx^{2r+2-h} = 0$$

ou

$$y - mx = -Ax^{r+1} \pm \sqrt{x^{2r+2-h}(A^2x^h - B)}.$$

Si h est impair, le radical n'est réel que pour des valeurs de x d'un signe déterminé, il y a rebroussement de première ou de seconde espèce suivant la parité de r.

Si h est pair; deux cas : $B > 0$ point double isolé, et si $B < 0$ deux branches de courbe réelles d'un même côté de la tangente et de part et d'autre de la courbe

$$y = mx - Ax^{r+1}.$$

Tangentes multiples. — La discussion complète serait trop longue: les considérations précédentes suffisent pour justifier les procédés pratiques suivants :

On prend tous les termes, à partir de ceux de moindre degré, contenant $y - mx$ en facteur; on prend de plus l'ensemble des termes de degré supérieur qui suivent immédiatement, en laissant de côté tous les autres termes: la courbe ainsi obtenue possède à l'origine, au

point de vue de la tangente considérée, les mêmes propriétés que la courbe proposée. On remplace y par mx dans les coefficients de $y - mx$ et dans les derniers termes conservés. On a ainsi une équation en $y - mx$ dont on étudie les racines au point de vue de la réalité et du signe, aux environs de l'origine. On en conclut la position des diverses branches de courbe réelles. Nous supposerons d'abord un cas où l'équation peut s'étudier complètement, par les procédés ordinaires.

Exemple. — Soit la courbe

$$x^3(y - x)^3(y - 2x)^2 + x^8(y - x) + x^3y^7 + 2y^{11} - x^{12} = 0.$$

Pour étudier la position par rapport à la tangente

$$y - x = 0,$$

il suffit de conserver les termes

$$x^3(y - x)^3(y - 2x)^2 + x^8(y - x) + x^3y^7 = 0.$$

En remplaçant y par x dans les coefficients, on a

$$(y - x)^3 + x^3(y - x) + x^5 = 0,$$

que nous considérons comme une équation du troisième degré en $y - x$.

La condition de réalité des trois racines est

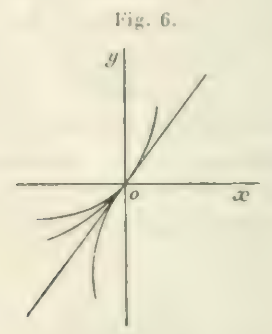
$$4x^9 + 27x^{10} < 0.$$

Quand x tend vers zéro cette expression a le signe de x. Donc, du côté des x positifs, il y a une seule valeur réelle pour $y - x$; cette valeur est positive; donc la courbe est du côté $y - x > 0$.

Pour $x < 0$ et suffisamment petit, on a trois branches réelles; l'équation ayant deux variations, il y a

deux branches telles que $y-x$ soit positif et une branche telle que $y-x<0$; il y a donc une branche ordinaire et un rebroussement de première espèce (*fig.* 6).

Fig. 6.



L'étude de la tangente double $(y-2x)^2=0$ rentre dans un cas déjà traité par un exemple. Cherchons les branches tangentes à Oy.

Conservons tous les termes jusqu'à y^{11}; on peut écrire l'équation ainsi réduite, pour faire apparaître $\frac{x}{y}$,

$$x^3\left[y^3\left(1-\frac{x}{y}\right)^3 y^5\left(1-\frac{2x}{y}\right)^2+x^5\left(1-\frac{x}{y}\right)-y^7\right]+2y^{11}=0.$$

L'équation sera nécessairement de la forme binome, puisqu'il n'y a pas de termes, après le premier, contenant x à une puissance inférieure à trois.

Cette équation se réduit à

$$x^3(1-y^2)+2y^6=0.$$

On voit que x^3 a le signe de $-y^6$; il y a donc une seule branche de courbe réelle tangente à Oy du côté des x négatifs.

Cas général. — Soit une courbe ayant à l'origine un

point multiple, les termes de moindre degré contenant y^p en facteur.

Les considérations justifiées précédemment nous permettent, après avoir ordonné l'équation par rapport aux puissances décroissantes de y, et remplacé, dans les coefficients, $\frac{y}{x}$ par zéro, de nous limiter à l'étude d'une équation de la forme

$$y^p + \mathrm{A}y^{p-1}x^a + \mathrm{B}y^{p-2}x^b + \ldots + \mathrm{L}yx^l + \mathrm{K}x^m = 0.$$

Pour étudier la réalité des racines lorsque x tend vers zéro, après avoir tenu compte des lacunes possibles, on examine le cas $x > 0$; la transformée en $-x$ permet ensuite d'étudier de même le cas $x < 0$.

On est conduit à substituer à y des valeurs tendant vers zéro en même temps que x, c'est-à-dire de la forme x^λ, ce qui donne

$$x^{p\lambda} + \mathrm{A}x^{a+\lambda(p-1)} + \mathrm{B}x^{b+\lambda(p-2)} + \ldots + \mathrm{L}x^{l+\lambda} + \mathrm{K}x^m.$$

Pour x suffisamment petit, le signe de cette expression sera celui du coefficient de la plus faible puissance de x. Il suffit de voir quelles valeurs on peut donner à λ pour que les résultats des substitutions soient de signes alternés.

Dans la pratique, en s'aidant de l'examen des variations de l'équation, il est aisé d'apercevoir les valeurs utiles de λ, comme nous le montrerons sur un exemple; dans le cas le plus général, on peut régler les tâtonnements de la manière suivante :

Prenons deux axes de coordonnées $O\lambda$, Oz et figurons les droites

$$z = p\lambda, \qquad z = a + \lambda(p-1), \qquad \ldots, \qquad z = l + \lambda, \qquad z = m,$$

qui représentent les variations des exposants, en mar-

quant sur les droites le signe + ou — suivant le signe du coefficient correspondant; ces droites ont des coefficients angulaires p, $p-1$, ... positifs et décroissants.

On voit aisément, quand λ varie, les régions où l'on peut trouver des signes alternés, et l'on en conclut le nombre de branches réelles. Ces régions sont séparées par les points de rencontre des droites deux à deux.

Pour étudier les branches négatives, toujours du côté des x positifs, on opère de même en substituant $-x^{\lambda}$.

Exemple :

$$y^4(y-x)^2 - 2y^2(y-x)^5 + yx^7 - x^{10} = 0.$$

On est amené à étudier l'équation

$$y^4x^2 + 2y^2x^5 + yx^7 - x^{10} = 0,$$
$$y^4 + 2y^2x^3 + yx^5 - x^8 = 0.$$

Pour $x > 0$, on a au plus deux racines réelles et négatives, comme l'indiquent la lacune et le nombre des variations. La substitution $y = 0$ donne le signe de x^8 qui est positif. Substituons $-x^{\lambda}$,

$$x^{4\lambda} + 2x^{3+2\lambda} + x^{\lambda+5} - x^8.$$

Construisons les droites

$$z = 4\lambda, \qquad z = 3 + 2\lambda, \qquad z = \lambda + 5, \qquad z = 8,$$

et marquons sur ces droites les signes des coefficients (*fig.* 7).

Pour que les deux branches possibles soient réelles, il faut que $x^{\lambda+8}$ donne son signe; il suffit pour cela de prendre λ entre a et b, le z de la droite marquée du signe — sera le plus petit.

On voit ainsi que λ est compris entre 2 et 3; la

courbe $y = -x^\lambda$ sépare les deux branches réelles de la courbe du côté des y négatifs.

Pour $x < 0$, formons la transformée en $-x$

$$y^4 - 2y^2x^3 - yx^5 + x^8 = 0.$$

Il peut y avoir deux branches réelles positives

$$y = 0 \qquad \text{donne le signe } +.$$

Fig. 7.

Substituons $y = x^\lambda$,

$$x^{4\lambda} - 2x^{2\lambda+3} - x^{\lambda+5} + x^8,$$

et construisons

$$z = 4\lambda, \qquad z = 2\lambda + 3, \qquad z = \lambda + 5, \qquad z = 8.$$

En changeant le signe de la deuxième droite sur la figure précédente, on voit qu'il suffit de prendre

$$\frac{3}{2} < \lambda < \frac{5}{2}$$

pour avoir un résultat de substitution négatif. Il y a donc deux branches positives réelles séparées par $y = x^2$, par exemple.

Pour étudier les racines négatives, substituons $y = -x^{\lambda}$,

$$x^{4\lambda} - 2x^{2\lambda+3} + x^{\lambda+5} + x^{8};$$

on a le signe négatif pour

$$0 < \lambda < \frac{5}{2}.$$

Donc les deux branches négatives sont réelles.

On voit aisément que le procédé est général. En construisant exactement les droites $z = a\lambda + b$ on peut, sans calculer les valeurs de λ, voir s'il est possible de trouver une ordonnee rencontrant ces droites en des points correspondant aux signes cherchés. La méthode est la même pour étudier le nombre des branches réelles et leur position par rapport à une tangente multiple $y - mx = 0$. (*A suivre.*)

[L¹1e]

SUR LA PROJECTION CENTRALE;

PAR J. M. JUHEL-RÉNOY.

Dans son excellent Ouvrage : *A Treatise on the analytical Geometry* (Dublin, 1885), M. John Casey expose, en ces termes (*Theory of projection*, Sect. V, p. 271), la théorie analytique de la projection centrale.

« Soient O l'origine, OX, OY les axes; BB' et II' deux droites parallèles à l'axe des y et rencontrant

l'axe OX en B et I (appelées respectivement *droite de base* et *droite de l'infini*). Soit P un point quelconque du plan; joignons IP coupant BB' en C; par C, menons CP' parallèle à OX, rencontrant OP en P'. Le point P' est appelé la *projection du point* P. »

M. Casey, faisant ensuite ressortir les avantages de cette méthode, entre autres de débarrasser le lecteur d'avoir à considérer différents plans et d'admettre l'usage de l'analyse, montre que les propriétés auxquelles elle conduit sont précisément celles de la perspective.

On voit, en particulier, que si une droite CD coupe la droite de base et la droite II' aux points C et D respectivement, sa projection passe par C et est parallèle à OD, et que si l'on mène la parallèle KK' à BB', telle que $\overline{BK} = -\overline{OI}$, KK' est la ligne de fuite du plan que l'on projette.

Le but de cette Note est de faire l'application géométrique de la méthode à l'étude des propriétés fondamentales des coniques, propriétés focales et intersection avec une droite, et en particulier, en ce qui concerne l'hyperbole, démonstration du théorème capital de la constance aréolaire du triangle déterminé par les deux asymptotes et une tangente quelconque, non sans avoir montré, au préalable, comment la définition de M. Casey se rattache à celle des figures homologiques, l'origine étant le centre d'homologie, et la base, l'axe d'homologie.

En effet, menons par P la ligne QR égale et parallèle à BI; nous aurons, μ étant le point de rencontre de OP et de BB',

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{IP}{IC} = \frac{PR}{BI} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu P}{\mu P'} = \frac{QP}{CP'}.$$

Or

$$\frac{QP}{PR} = \frac{PC}{IP} = \frac{CP'}{OI}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mu P}{\mu P'} = \frac{QP}{CP'} = \frac{PR}{OI}$$

et, par suite,

$$(O\mu PP') = \frac{OP}{OP'} : \frac{\mu P}{\mu P'} = \frac{OI}{BI}.$$

Le rapport anharmonique des quatre points $O\mu PP'$ est donc constant et, par suite, les points P et P' décrivent deux lignes homologiques, ce qui justifie la définition de perspective donnée par M. Casey. On sait, en effet, que, quand deux figures sont homologiques, il suffit de faire tourner le plan de l'une d'elles d'un angle quelconque autour de l'axe d'homologie pour que les deux figures soient en perspective.

On voit d'ailleurs que la construction dont nous nous occupons n'est autre que celle qui donne l'homologue P' d'un point P, connaissant le point I dont l'homologue est à l'infini sur OX. Elle se déduit, en outre, immédiatement de la construction de la Hire (*Aperçu historique*, p. 128) ; car il est évident que les deux droites OR et QP' sont parallèles, les points Q et R étant respectivement sur les droites BB' et II'.

I. Théorème. — *Tout cercle peut se projeter suivant une courbe telle que le rapport des distances d'un quelconque de ses points à un point fixe et à une droite fixe soit constant.*

C'est un théorème bien connu de la théorie des figures homologiques. Sa démonstration se fait en prenant pour origine le centre F du cercle et pour droite de base la tangente en B à la circonférence. On en conclut que, m étant la projection de M, on a

$$\frac{mF}{mP} = \frac{BF}{BK} = \text{const.} \qquad \text{avec} \qquad BK = -FI.$$

mP' étant la distance de m à la ligne de fuite KK'. Le point F est le foyer, et la ligne de fuite la directrice.

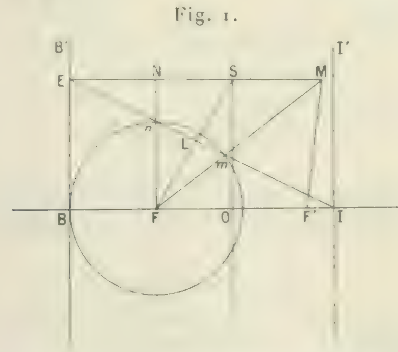
Proposons-nous de construire la tangente à la conique en m; soit T le point d'intersection de la ligne de fuite et de la parallèle menée par F à la tangente au cercle en M; les perspectives de deux droites parallèles se coupant sur la ligne de fuite KK', mT est la tangente en m; on voit que $\widehat{mFT}$ est droit.

Théorème inverse. — *On peut projeter une conique suivant un cercle.*

Il suffit de prendre pour origine le foyer F de la conique et, pour droite II' ou droite limite, la directrice correspondante.

Théorème. — *La projection d'un cercle qui n'est pas tangent à la droite* II' *est une courbe telle que la somme ou la différence des distances de l'un quelconque de ses points à deux pointe fixes (foyers) est constante (fig. 1).*

Fig. 1.



En effet, prenons pour origine le centre F, la droite II' ne rencontrant pas le cercle, et pour base BB' la tangente au cercle parallèle à II'. Soient m, n, E les points

d'intersection avec la circonférence et avec la base d'une sécante passant par I, qui se projette suivant une parallèle à FI passant par E et rencontrant la courbe de projection en deux points M et N, respectivement situés sur Fm et Fn.

Si L désigne le point de rencontre de mn avec la polaire de I, on a

$$F(mnIL) = -1.$$

Donc FL coupe MN en son milieu S. Or

$$\frac{FS}{FL} = \frac{IE}{IL} = \text{const.}$$

Le lieu de S est donc une perpendiculaire à FI rencontrant cette droite en un point fixe O; c'est un axe de symétrie pour le lieu des points M et N.

On a d'ailleurs

$$\frac{MF}{mF} = \frac{IE}{Im} \quad \text{et} \quad \frac{NF}{nF} = \frac{IE}{In},$$

d'où, par addition,

$$\frac{MF + NF}{mF} = IE\left(\frac{1}{Im} + \frac{1}{In}\right) = 2\frac{IE}{IL}$$

et, par suite,

$$MF + NF = \text{const.}$$

Or, par raison de symétrie, NF est égale à la distance du point M au symétrique F' de F par rapport à O; on a donc

$$MF + MF' = \text{const.},$$

ce qui démontre la proposition.

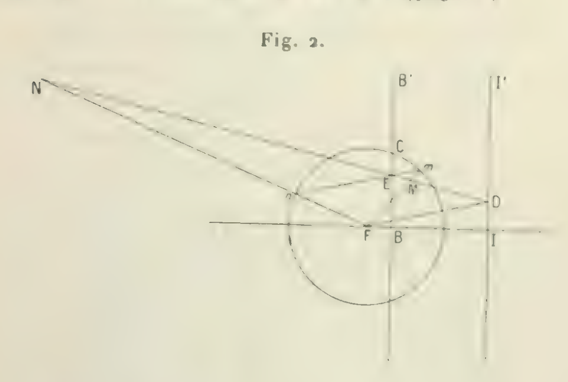
Dans le cas où la droite II' coupe le cercle, on démontre d'une façon identique que

$$MF - MF' = \text{const.}$$

De ce qui précède, on peut donc conclure que la perspective d'un cercle peut être une ellipse, une hyperbole ou une parabole, ces trois courbes ayant la propriété commune d'être le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe (foyer) et à une droite fixe (directrice) est constant.

II. Soit à trouver les points d'intersection d'une droite et d'une conique à centre donné par un foyer F, la directrice correspondante II' et un point C. Projetons la conique suivant un cercle, en prenant pour origine F et pour base la perpendiculaire BB' à FI menée par C et soient D et E les points d'intersection de la droite donnée avec II' et BB'; la parallèle menée par E à FD rencontre le cercle en deux points m et n qui sont les projections des points M et N cherchés, points situés respectivement sur Fm et Fn (*fig.* 2).

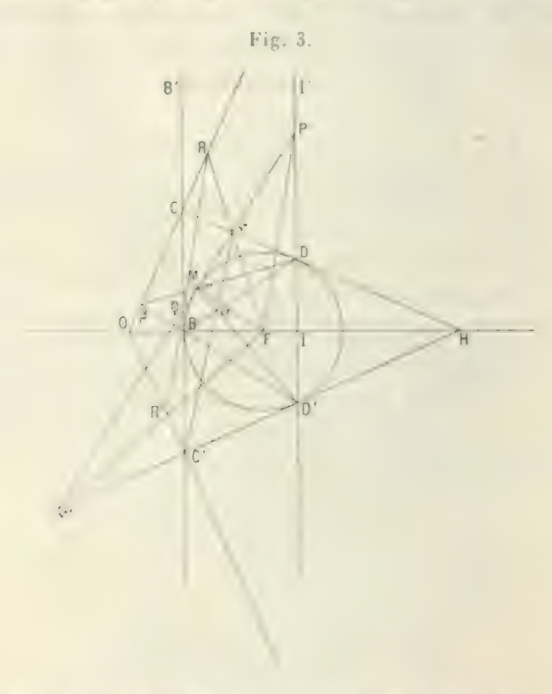
Fig. 2.



III. Considérons plus particulièrement le cas de l'hyperbole et de ses asymptotes. C'est un théorème bien connu, qui peut même servir de définition à l'hyperbole, qu'une tangente à cette courbe forme avec les asymptotes un triangle d'aire constante, le point de con-

tact étant le milieu du segment intercepté sur la tangente par les asymptotes. Pour le démontrer, projetons un cercle (*fig.* 3) en prenant pour origine son centre F,

Fig. 3.



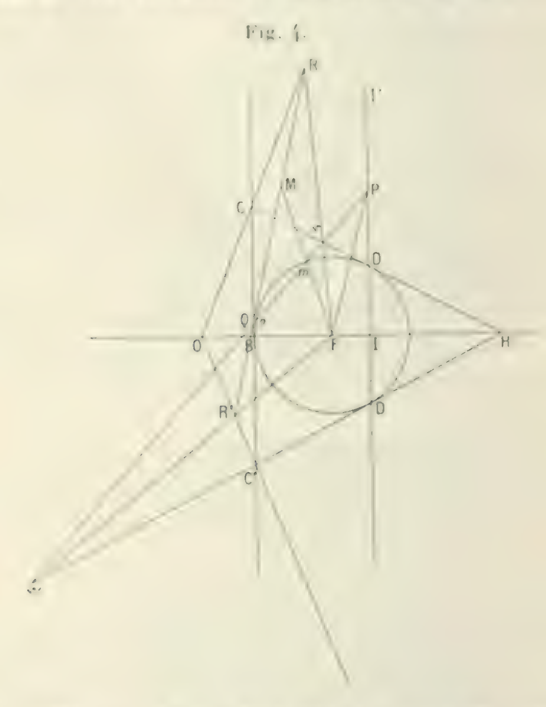
pour base la tangente BB' en un point B et pour droite II' une parallèle à BB' coupant le cercle en deux points D et D'; les tangentes en D et D' à la circonférence coupent la base respectivement en C et C'; la projection du cercle est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites OC et OC' perpendiculaires, la première sur CD, la seconde sur C'D'; la tangente en un point *m* du cercle rencontre respectivement les droites II' en P, CD en *r*, BB' en Q, C'D' en *r'*, et se projette suivant une parallèle menée par Q à FP et rencontrant respectivement les droites OC et F*r* en R, F*m* en M, OC'

et Fr' en R'. La proposition sera démontrée, si l'on fait voir que les triangles ROR' et COC' sont équivalents et que M est le milieu de RR'. La première partie résulte de ce que CR' et $C'R$ sont parallèles ou que Cr' et $C'r$ se coupent sur la droite H'. En effet, soient γ le point d'intersection de Bm et de H', α le point d'intersection de BD et de mD', β le point d'intersection de BD' et de mD; $\alpha\gamma$ est la polaire de β, elle se confond donc avec $C'r$; de même $\beta\gamma$ est la polaire de α, elle se confond donc avec Cr'. Donc Cr' et $C'r$ se coupent en γ sur H'. La seconde partie résulte immédiatement de ce que les quatre points P, r, m, r' forment une division harmonique. En effet, soit P' le conjugué harmonique de P par rapport à DD', la droite qui joint P' au pôle H de DD' est la polaire de P par rapport au cercle et aux deux tangentes; elle passe donc par m.

La proposition est donc établie; on peut démontrer, d'une manière analogue, qu'une transversale rencontre la courbe et les asymptotes en deux couples de points ayant le même milieu. En effet, soit une sécante rencontrant respectivement (*fig.* 4) H' en P, CD en r, la circonférence en m et n, la base tangente au cercle en un point Q, $C'D'$ en r' et se projetant suivant une droite coupant OC et Fr en R, Fm en M, Fn en N, la base en Q, OC' et Fr' en R' et de plus parallèle à FP. Il suffit de montrer que le rayon FP a même conjugué harmonique par rapport à Fr et Fr' d'une part, à Fm et Fn de l'autre, ou que P a même conjugué par rapport aux deux couples de points r, r' et m, n. En effet, soit P' le conjugué de P par rapport à DD'; H étant le pôle de DD', $P'H$ est la polaire de P par rapport au cercle et par rapport aux deux tangentes à la circonférence en D et D'.

IV. Considérons maintenant le cas de la parabole, c'est-à-dire le cas où la droite II' est tangente au cercle à projeter et prenons pour base BB' la tangente parallèle à II'. La tangente en un point *m* du cercle rencontre la base en D et la droite II' en C et se projette suivant

Fig. 4.



la parallèle menée par D à FC, le point de contact M se trouvant sur F*m*. Or

$$\widehat{DMF} = \widehat{MFC} = \widehat{CFI} \quad \text{et} \quad \widehat{DFC} = 90^\circ.$$

Donc, dans la parabole, la tangente fait des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et la parallèle à l'axe menée par ce point, et la projection du foyer sur la tangente est sur la tangente au sommet.

Soient CD et C′D′ deux tangentes parallèles au cercle en des points m et m'; leurs projections, respectivement parallèles à FC et FC′, et par suite rectangulaires, se coupent sur la ligne de fuite, en d'autres termes sur la directrice et par suite le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est la directrice.

Cherchons enfin les points d'intersection d'une droite L et d'une parabole. Projetons la parabole suivant un cercle en prenant pour origine le foyer F, pour base BB′ la tangente au sommet B et pour droite II′ la directrice; la droite L rencontre la directrice en C, la tangente au sommet en D; sa projection, menée par D, parallèle à FC, rencontre le cercle de projection, décrit de F comme centre avec FB comme rayon, aux points m et n, projections des points M et N cherchés et situés respectivement sur les rayons Fm et Fn.

Comme conséquence de cette construction, remarquons que la bissectrice de l'angle MFN est perpendiculaire sur mn et que, par suite, FC est bissectrice de l'angle formé par FM et FN′ prolongement de FN. On a donc ce théorème bien connu, que la construction analogue, donnée précédemment, permet d'énoncer pour une conique quelconque :

Théorème. — *Soient* M, N *deux points quelconques d'une conique; la droite* FC *qui joint un foyer* F *de cette conique au point* C *de rencontre de la sécante* MN *avec la directrice qui correspond au foyer* F, *est bissectrice de l'un des angles formés par les droites* FM, FN.

On pourrait obtenir une autre construction des points d'intersection d'une parabole et d'une droite en projetant le cercle, au lieu de la parabole, et retrouver ainsi une construction donnée par M. Ernest Lebon dans les

Nouvelles Annales de Mathématiques (1885, p. 338). Soient, en effet, un cercle de centre F, BB′ et II′ deux tangentes aux extrémités du diamètre BI, M et N les points d'intersection avec une sécante qui coupe la base en C et la droite II′ en D; la sécante se projette suivant une droite L passant par C et parallèle à FD; le cercle, suivant une parabole ayant pour foyer F et pour tangente au sommet BB′, les points M et N ont pour projections les points *m* et *n* d'intersection de la droite L et de la parabole. D'où la construction. M. Lebon remarque, avec raison, qu'elle est plus simple que celle que l'on donne habituellement. Les considérations qui précèdent permettent d'ailleurs d'établir, avec la même facilité, la construction que, dans le même article, M. Lebon a donnée des points d'intersection d'une droite et d'une conique dont on connaît un foyer et les sommets situés sur l'axe focal.

Soient, en effet, F un foyer d'une conique, B et I les sommets de l'axe focal, BB′ et II′ les tangentes aux sommets, la première étant la base et la seconde la droite dont la projection passe à l'infini, la conique se projetant suivant une parabole ayant pour foyer F et pour tangente au sommet BB′. Une droite CD rencontrant II′ en C et BB′ en D se projette suivant une droite DG, coupant II′ en G, dont les points de rencontre avec la parabole, *m*′ et *n*′, s'obtiennent par la construction donnée précédemment, c'est-à-dire en joignant le point d'intersection E de CF et de la droite HH′ symétrique de BB′ par rapport à F au point D, en prenant les points d'intersection *m* et *n* de DE avec le cercle de centre F et de rayon FB, puis les points d'intersection *m*′ et *n*′ de DG avec les rayons F*m* et F*n*. On en déduit immédiatement les points d'intersection M et N de la droite et de la conique données, qui se trouvent sur la

droite CD et les rayons Fm et Fn respectivement. C'est la construction même que M. Lebon a obtenue, d'une manière toute différente. On remarquera que la ligne DG est inutile pour la construction.

N. B. — On voudra bien observer que la construction, donnée au paragraphe IV, des points d'intersection d'une droite et d'une parabole s'applique, sans modification, au cas d'une conique quelconque. La démonstration élémentaire de la construction est d'ailleurs immédiate. C'est, d'autre part, un cas particulier de celle du paragraphe II.

[D6iβ]

SUR UNE INÉGALITÉ DE M. HADAMARD;

Par M. LANDAU.

Dans un travail récent *Sur les séries de la forme* $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$, publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4ᵉ série, t. IV, 1904, p. 529-533), M. Hadamard a développé quelques inégalités, qui, suivant son expression, « peuvent avoir leur utilité ». Je vais confirmer, dans les pages suivantes, cette attente de M. Hadamard, en en faisant une petite application à la théorie de la fonction $\zeta(z)$ de Riemann. En combinant les anciennes méthodes avec une de ses nouvelles relations, je parviendrai à prouver le théorème suivant :

Il existe une constante positive α *telle que, pour tous les* $q > 0$,

$$|\zeta(1+qi)| > \frac{\alpha}{1+\log^5 q}.$$

En d'autres termes, la limite inférieure d'indétermination, pour $q = \infty$, du produit

$$\log^6 q \,|\zeta(1 + qi)|$$

est supérieure à o.

Jusqu'ici, on ne connaissait que l'inégalité un peu moins précise

$$\liminf_{q=\infty} \log^7 q \,|\zeta(1 + qi)| > 0,$$

démontrée par moi, comme proposition auxiliaire, par exemple dans mon travail *Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes* [*Mathematische Annalen*, t. LVI, 1903, p. 654, formule (19)].

Je commence par refaire, dans un cas spécial, un raisonnement général de M. Hadamard. Soit

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

une série de Dirichlet, dont les coefficients a_n sont tous ≥ 0 et qui converge pour $R(z) > 1$. Soient $\varepsilon > 0$, q réel; on aura

$$F(1+\varepsilon) \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

$$F(1+\varepsilon+qi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon+qi}},$$

$$R\,F(1+\varepsilon+qi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \cos(q \log n),$$

et pareillement

$$R\,F(1+\varepsilon+2qi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \cos(2q \log n).$$

Donc, en posant

$$(1)\qquad \begin{cases} F(1+\varepsilon) = R_0, \\ \mathrm{R}\,F(1+\varepsilon+qi) = R_1, \\ \mathrm{R}\,F(1+\varepsilon+2qi) = R_2, \end{cases}$$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \left(\cos(q \log n) - \frac{R_1}{R_0} \right)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \left(\cos^2(q \log n) - \frac{2R_1}{R_0} \cos(q \log n) + \frac{R_1^2}{R_0^2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2q \log n) - \frac{2R_1}{R_0} \cos(q \log n) + \frac{R_1^2}{R_0^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} R_0 + \frac{1}{2} R_2 - \frac{2R_1}{R_0} R_1 + \frac{R_1^2}{R_0^2} R_0 = \frac{1}{2} R_0 + \frac{1}{2} R_2 - \frac{R_1^2}{R_0},$$

$$\frac{R_2}{R_0} \geq 2 \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 1.$$

C'est l'inégalité (3) du Mémoire de M. Hadamard, pour le cas spécial qui m'intéresse; elle donne

$$R_1^2 \leq \frac{1}{2} R_0 (R_0 + R_2),$$

$$(2)\qquad R_1 \geq -\sqrt{\frac{1}{2} R_0 (R_0 + R_2)}.$$

Je rappelle en outre les propositions connues (*voir* p. 649, 651 et 653 de mon Mémoire cité) :

$$(3)\qquad \log\zeta(1+\varepsilon) < 1 + \log\frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{pour} \qquad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$\left.\begin{aligned} &(4)\qquad |\zeta(1+\varepsilon+2qi)| < 2\log q \\ &(5)\qquad |\zeta'(1+\varepsilon+qi)| < 6\log^2 q \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad q \geq 10.$$

Je pose maintenant, pour $\mathrm{R}(z) > 1$,

$$F(z) = \log\zeta(z) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{mz}},$$

où p parcourt les nombres premiers; c'est une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

où $a_n = \frac{1}{m}$ pour $n = p^m$ et $a_n = 0$ pour les n qui ne sont pas des puissances de nombres premiers. Tous les a_n étant $\geqq 0$, on peut appliquer l'inégalité (2), en posant, d'après (1),

$$\begin{aligned} R_0 &= \log \zeta(1+\varepsilon), \\ R_1 &= R \log \zeta(1+\varepsilon+qi) = \log |\zeta(1+\varepsilon+qi)|, \\ R_2 &= R \log \zeta(1+\varepsilon+2qi) = \log |\zeta(1+\varepsilon+2qi)|. \end{aligned}$$

On obtient, pour $\varepsilon > 0$, $q \geqq 0$,

$$\log |\zeta(1+\varepsilon+qi)| \geqq -\sqrt{\frac{1}{2}\log\zeta(1+\varepsilon)\left(\log\zeta(1+\varepsilon)+\log|\zeta(1+\varepsilon+2qi)|\right)},$$

d'où, en vertu de (3) et (4), pour $0 < \varepsilon \leqq 1$, $q \geqq 10$,

$$\log |\zeta(1+\varepsilon+qi)| \geqq -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(1+\log\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\log q\right)},$$

(6) $$|\zeta(1+\varepsilon+qi)| \geqq \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(2+\log\frac{1}{\varepsilon}+\log\log q\right)}}}.$$

D'autre part, pour $0 < \varepsilon \leqq 1$, $q \geqq 10$, (5) donne

$$|\zeta(1+\varepsilon+qi)-\zeta(1+qi)| = \left| \int_{1+qi}^{1+\varepsilon+qi} \zeta'(z)\,dz \right| < 6\varepsilon \log^2 q,$$

donc, en appliquant (6),

$$\begin{aligned} |\zeta(1+qi)| &= |\zeta(1+\varepsilon+qi) - (\zeta(1+\varepsilon+qi)-\zeta(1+qi))| \\ &\geqq |\zeta(1+\varepsilon+qi)| - |\zeta(1+\varepsilon+qi)-\zeta(1+qi)| \end{aligned}$$

(7) $$> \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(2+\log\frac{1}{\varepsilon}+\log\log q\right)}}} - 6\varepsilon \log^2 q.$$

Pour tout $q > 10$, je fais maintenant

$$\varepsilon = \frac{1}{e^{10}\log^6 q},$$

ce qui satisfait évidemment aux conditions $0 < \varepsilon < 1$. J'obtiens, en vertu de (7),

$$|\zeta(1+qi)| > \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{2}(11+8\log\log q)(12+9\log\log q)}}} - \frac{6}{e^{10}\log^6 q},$$

$$(8)\quad \log^6 q\,|\zeta(1+qi)| > \frac{\log^6 q}{e^{6\sqrt{\left(\frac{11}{8}+\log\log q\right)\left(\frac{4}{3}+\log\log q\right)}}} - \frac{6}{e^{10}}.$$

Or, en posant $\log\log q = y$,

$$\lim_{q=\infty} \frac{\log q}{e^{\sqrt{\left(\frac{11}{8}+\log\log q\right)\left(\frac{4}{3}+\log\log q\right)}}} = \lim_{y=\infty} \frac{e^y}{e^{\sqrt{\left(\frac{11}{8}+y\right)\left(\frac{4}{3}+y\right)}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{y=\infty}\left[y - y\sqrt{\left(1+\frac{11}{8y}\right)\left(1+\frac{4}{3y}\right)}\right]} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{8}+\frac{4}{3}\right)} = e^{-\frac{65}{48}}.$$

Le second membre de (8) tend donc, pour $q = \infty$, vers la limite positive

$$\beta = \left(e^{-\frac{65}{48}}\right)^6 - 6e^{-10} = e^{-\frac{65}{8}} - 6e^{-10} = e^{-10}\left(e^{\frac{15}{8}} - 6\right).$$

Donc, pour tous les q suffisamment grands ($q \geqq q_0$),

$$(9)\quad (1+\log^6 q)\,|\zeta(1+qi)| > \log^6 q\,|\zeta(1+qi)| > \frac{\beta}{2};$$

d'autre part, $\zeta(z)$ étant différent de 0 pour $R(z) = 1$, le premier membre de (9) est, pour $0 < q < q_0$, supérieur à une constante positive; il existe donc une constante positive α telle qu'on ait, pour tous les $q > 0$,

$$(1+\log^6 q)\,|\zeta(1+qi)| > \alpha,$$

$$|\zeta(1+qi)| > \frac{\alpha}{1+\log^6 q},$$

ce qu'il fallait démontrer.

En vertu de l'identité

$$|\zeta(1+qi)| = |\zeta(1-qi)| \qquad (q \gtrless 0),$$

on a, pour tous les $q \gtrless 0$,

$$|\zeta(1+qi)| > \frac{\alpha}{1+\log^{8}|q|}.$$

Dans tous ces développements, je ne me suis appuyé que sur les propriétés les plus élémentaires de la fonction $\zeta(z)$. Je ne me suis pas servi du théorème important de M. Hadamard (publié en 1893) sur l'existence et la densité des racines imaginaires de $\zeta(z)$, ni même du fait, découvert déjà par Riemann, que la fonction $\zeta(z)$ existe dans tout le plan.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

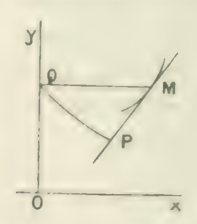
Poitiers.

Épreuve écrite. — I. *Former l'équation différentielle des lignes géodésiques d'une surface de révolution définie par les relations*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \varphi(r)$$

et montrer que l'intégration se ramène aux quadratures.

II. *Une courbe plane C est rapportée à deux axes rec-*



tangulaires Oz et Ox; un point quelconque M de cette courbe étant projeté en Q sur l'axe Oz, le point Q se pro-

jette en P sur la tangente en M, et l'on a

$$PM = a;$$

déterminer la courbe.

III. *Trouver les projections sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution des lignes géodésiques de la surface engendrée par la courbe C, tournant autour de Oz.*

Épreuve pratique. — I. *On demande les conditions pour que l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{-a}\,dx}{b-x}$$

ait une valeur déterminée.

II. *Calculer cette intégrale.*

III. *Cas particulier*

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = 2.$$

(Juillet 1905.)

Épreuve écrite. — I. *On prend pour origine des rayons vecteurs d'une épicycloïde le centre du cercle fixe. Soient alors ρ le rayon de courbure en un point quelconque, r le rayon vecteur correspondant; démontrer qu'il existe une relation de la forme*

$$\rho^2 + (m-1)r^2 = \text{const.},$$

m est un nombre positif.

II. *Trouver toutes les courbes planes telles que l'on ait*

$$\rho^2 - (m-1)r^2 = K,$$

m étant un nombre positif donné, K une constante donnée.

Épreuve pratique. — *Trouver le volume limité par la surface lieu des cercles de courbure des sections normales en un point d'une surface, en admettant que, pour une*

section normale faisant avec un plan normal fixe l'angle α, le rayon de courbure soit donné par la formule

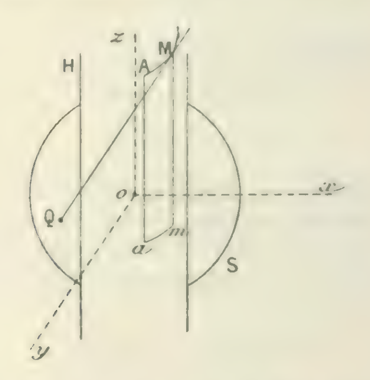
$$\rho = \frac{c^3}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}.$$

(Novembre 1905.)

CERTIFICATS D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE.

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Soient une sphère* S *de centre* O *et de rayon* r, H *un cylindre de révolution de rayon* $\rho < r$ *et*



dont l'axe Oz *passe par le centre de la sphère. On considère sur le cylindre* H *les courbes dont les tangentes sont en même temps tangentes à la sphère* S ; *on exclut parmi ces courbes l'intersection de* S *et de* H. *Soient* C *l'une d'entre elles,* M *un point quelconque de* C, *et* Q *le point où la tangente en* M *vient toucher la sphère* S.

1° *Démontrer que le plan osculateur en* M *à la courbe* C *est tangent en* Q *à la sphère* S.

2° *Déterminer la surface développable* R *contenant la courbe* C *et telle qu'en tout point* M *de* C *le plan osculateur à cette courbe soit normal à la développable* R.

3° *Montrer qu'en choisissant convenablement une origine* A *sur la courbe* C, *l'aire cylindrique limitée par l'axe* AM, *par les génératrices* Aa, Mm *et par la projection* am *de l'arc* AM *sur le plan* xOy *perpendiculaire à* Oz *est proportionnelle à l'arc* AM.

4° *Soient* ω, ω' *les centres du cercle osculateur et de la sphère osculatrice en* M, *montrer que le triangle* M$\omega\omega'$ *reste semblable à lui-même quand le point* M *se déplace sur la courbe* C.

Épreuve pratique. — *Soit le paraboloïde de révolution autour de* Oz *dont les coordonnées d'un point quelconque en fonction de deux paramètres* r *et* θ *sont*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \frac{r^2}{2}.$$

Étant donnés deux points $M_0(r_0, \theta_0)$, $M_1(r_1, \theta_1)$ *sur cette surface, on considère sur le paraboloïde une courbe* C *joignant ces deux points et faisant avec les méridiens qu'elle rencontre un angle constant* V.

Déterminer l'angle V *en fonction de* r_0, θ_0, r_1, θ_1.

(Juillet 1905.)

Épreuve écrite. — *Énoncer et démontrer les théorèmes généraux sur la courbure des lignes tracées sur une surface et passant par un même point.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan^3 x}\, dx.$$

(Novembre 1905.)

QUESTIONS.

2038. On mène les hauteurs AD, BE, CF du triangle ABC. Soit $D_1E_1F_1$ l'axe d'homologie des triangles ABC et DEF. Par E_1, F_1, D_1 on mène les parallèles à AB, BC, CA qui

coupent BC, CA, AB aux points I, H, K en ligne droite, et les parallèles à BC, CA, AB, qui coupent AB, BC, CA aux points K_1, I_1, H_1 aussi en ligne droite. Soient Q et Q_1 les coniques circonscrites à ABC, et tangentes, la première à AI, BH, CK et la seconde à AI_1, BH_1, CK_1.

I. Si par un point O de Q on mène les perpendiculaires à BC, CA, AB, elles coupent CA, AB, BC en μ, ν, λ, et l'on a la droite $\Delta(\lambda\mu\nu)$. Ces mêmes perpendiculaires, menées par un point O_1 de Q_1, coupent AB, BC, CA aux points ν_1, λ_1, μ_1, et l'on a la droite $\Delta(\lambda_1\mu_1\nu_1)$.

II. Les coniques Q, Q_1 et le cercle ABC ont un quatrième point commun ω auquel correspondent deux droites Δ, Δ_1 et la droite Δ_2 de Simson.

III. Si ABC est un triangle équilatéral, les coniques Q, Q_1 se superposent au cercle ABC, et à tout point O de ce cercle correspondent trois droites Δ, Δ_1, Δ_2. (P. Sondat.)

2039. Démontrer la relation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum \frac{f'''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2 f''(\alpha)} + \sum \frac{f'''(\beta)}{[f''(\beta)]^2 f(\beta)} \\ &\qquad + \sum \frac{1}{f(\gamma) f'(\gamma)} = 0, \end{aligned}\right.$$

la première somme s'étendant à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation algébrique

$$f(x) = 0;$$

la deuxième somme s'étendant à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

et la troisième somme s'étendant à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation

$$f''(x) = 0.$$

Étendre la relation (1), en faisant intervenir les dérivées quatrième, cinquième, etc., du polynome $f(x)$.

(Nicolas Kryloff.)

[K13cβ]

SUR UNE SURFACE DU TROISIÈME ORDRE QUI EST L'ANALOGUE DU CERCLE DES NEUF POINTS;

PAR M. G. FONTENÉ.

J'ai donné récemment dans ce Journal (1906, p. 55) un théorème relatif au triangle pédal d'un point S; ce théorème généralise la construction d'Hamilton pour le point de contact du cercle des neuf points et du cercle inscrit. On trouvera ici l'extension *partielle* de ce théorème au cas de l'espace; je n'ai pas réussi à obtenir une extension du théorème de Feuerbach.

Ces nouvelles recherches m'ont conduit à compléter le théorème de Géométrie plane. Je commencerai donc par rappeler l'énoncé de ce théorème, en écartant les faits que je n'ai pu généraliser, en indiquant des faits nouveaux qui ont leurs analogues dans l'espace.

I. — GÉOMÉTRIE PLANE.

1. Étant donné un triangle ABC, le lieu d'un point M dont les projections sur les trois côtés du triangle sont en ligne droite est le cercle circonscrit au triangle (*Simson*).

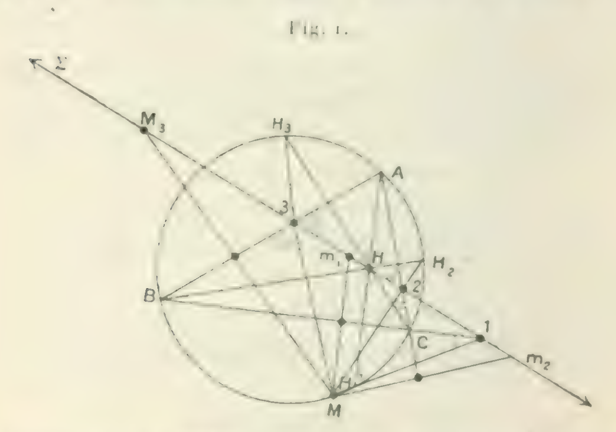
Si H est l'orthocentre du triangle, la droite de Simson du point M passe au milieu K de MH (*Steiner*).

Lorsque M décrit le cercle ABC, le lieu du point K est un cercle, homothétique au cercle ABC pour le centre d'homothétie H et le rapport $\frac{1}{2}$; le cercle qui s'introduit ainsi est le cercle des neuf points du triangle.

Les milieux des segments HA, HB, HC étant A″, B″, C″, ce cercle est le lieu d'un point K dont les projections sur les côtés du triangle A″B″C″ sont en ligne droite.

2. J'indiquerai encore pour le point M, relativement au triangle ABC, une construction que nous aurons l'occasion d'appliquer pour le point K, relativement au triangle A″B″C″. Les symétriques du point M par rapport aux trois côtés du triangle, soient M_1, M_2, M_3 (*fig.* 1), sont sur une droite parallèle à la droite de

Fig. 1.



Simson du point M et passant par le point H; nous appellerons cette droite la *droite de Steiner* du point M, et nous la désignerons par la lettre Σ. La droite Σ étant donnée, il est facile de retrouver le point M. En effet, la droite Σ rencontre les côtés du triangle en trois points 1, 2, 3, et les droites 1M, 2M, 3M sont les symétriques de Σ par rapport à ces côtés; on peut construire ces droites symétriques, et par suite obtenir le point M, en joignant les points 1, 2, 3 aux points H_1, H_2, H_3 qui sont les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle.

3. Théorème. — *Soit un triangle* ABC, *et soient* A', B', C' *les milieux des côtés. On projette un point* S *en* a, b, c *sur les côtés du triangle : si l'on désigne par* α, β, γ *les points d'intersection des côtés correspondants des deux triangles* A'B'C' *et* abc, *les trois droites* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ *concourent en un point* K (¹).

Appelons H' *le centre du cercle* ABC, *qui est en même temps l'orthocentre du triangle* A'B'C' : *si le point* S *se déplace sur une droite* σ *passant par le point* H', *le point* K *reste fixe : les milieux des segments* HA, HB, HC *étant* A'', B'', C'', *les projections du point* K *sur les côtés du triangle* A''B''C'' *sont en ligne droite, ou encore les symétriques du point* K *par rapport aux côtés de ce triangle, soient* K_1, K_2, K_3, *sont sur une droite* Σ *qui passe nécessairement en* H, *et cette droite* Σ *est perpendiculaire à la droite* H'S *ou* σ.

Il y a donc un lieu du point K, *et ce lieu est le cercle des neuf points du triangle* ABC.

Si l'on donne le point S, ou plutôt la droite H'S ou σ, pour avoir le point K, on mène par H la droite Σ perpendiculaire à σ : cette droite Σ rencontre les côtés du triangle A''B''C'' aux points 1'', 2'', 3''; si H_1, H_2, H_3 désignent les symétriques du point H par rapport aux côtés du triangle A''B''C'', *c'est-à-dire les pieds des*

(¹) Ce fait rentre dans un théorème général indiqué par M. Bricard (*Nouvelles Annales*, 1906, p. 96) :

Étant donnés deux triangles ABC, A'B'C', *si les droites* AA', BB', CC' *rencontrent respectivement les côtés* a, b, c *du premier triangle en trois points situés sur une même droite, les points* (a, a'), (b, b'), (c, c') *se joignent aux sommets* A', B', C' *du second triangle par trois droites concourantes.*

Pour le théorème du texte, les deux triangles sont le triangle A'B'C' et le triangle pédal.

hauteurs du triangle ABC, la droite qui joint le point H_1 au point I'', et les deux droites analogues, concourent au point **K**.

4. Quand on projette un point **K** sur les côtés d'un angle A'', la droite déterminée par les projections de ce point est perpendiculaire à la droite inverse de la droite A''**K** par rapport à l'angle; les droites inverses des droites A''K, B''K, C''K, par rapport aux angles A'', B'', C'' du triangle $A''B''C''$, sont donc perpendiculaires à la droite Σ ou parallèles à la droite σ. On en conclut aisément ceci : *Les coordonnées du point* K, *rapporté au triangle* $A''B''C''$, *sont inversement proportionnelles aux distances algébriques du point* S *aux axes menés par* H' *parallèlement aux côtés de ce triangle.*

II. — Géométrie dans l'espace.

5. Étant donné un tétraèdre ABCD, le lieu d'un point M dont les projections sur les plans des quatre faces du tétraèdre sont dans un même plan est une surface $\mathfrak{M}$ dont l'équation, par rapport au tétraèdre de référence ABCD, est

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}+\frac{D}{t}=0,$$

A, B, C, D représentant les aires des faces du tétraèdre; c'est une surface du troisième ordre, corrélative d'une surface de Steiner, et ayant pour points doubles les points A, B, C, D; elle contient les arêtes du tétraèdre [1].

Ce théorème est bien connu, mais je ne crois pas que l'on ait remarqué ceci : lorsque le tétraèdre est orthocentrique, l'orthocentre étant H, le plan qui contient les projections d'un point M de la surface ren-

contre la droite HM en un point K pour lequel on a

$$\frac{HK}{HM} = \frac{2}{3}.$$

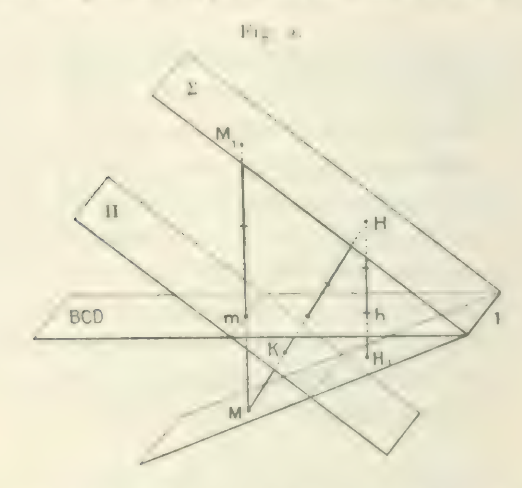
Lorsque M *décrit la surface* $\mathcal{M}$, *le lieu du point* K *est une surface* $\mathcal{K}$ *homothétique à la surface* $\mathcal{M}$ *pour le centre d'homothétie* H *et le rapport* $\frac{2}{3}$; *la surface qui s'introduit ainsi joue pour le tétraèdre un rôle comparable à celui du cercle des neuf points pour le triangle. Si* A″, B″, C″, D″ *sont les points situés aux* $\frac{2}{3}$ *des segments* HA, HB, HC, HD, *cette surface* $\mathcal{K}$ *est le lieu des points dont les projections sur les plans des faces du tétraèdre* A″B″C″D″ *sont coplanaires.* C'est une surface du troisième ordre ayant pour points doubles les points A″, B″, C″, D″.

6. J'indique pour le point M, relativement au tétraèdre ABCD, une construction que nous aurons l'occasion d'appliquer pour le point K, relativement au tétraèdre A″B″C″D″. La longueur KH étant double de MK, si l'on prolonge d'une longueur double de leur propre longueur les perpendiculaires abaissées de M sur les plans des faces du tétraèdre (*fig.* 2, pour le plan BCD), on obtient quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 situés dans un même plan Σ parallèle au plan II des projections et passant par H.

Le plan Σ étant donné, on retrouve facilement le point M. Soient 1, 2, 3, 4 les droites suivant lesquelles le plan Σ coupe les plans des faces du tétraèdre; soient H_1, H_2, H_3, H_4 les points obtenus en abaissant de H des perpendiculaires sur les plans des faces et en les prolongeant de la moitié de leur longueur; le plan mené par la droite 1 et le point H_1, et les trois plans analogues, ont en commun le point M.

7. Théorème. — *Soit un tétraèdre orthocentrique* ABCD, *et soient* A', B', C', D' *les centres de gravité des faces. On projette un point* S *en* a, b, c, d

Fig. 2.



sur les plans des faces; si l'on désigne par α, β, γ, δ *les droites d'intersection des plans des faces correspondantes des deux tétraèdres* A'B'C'D' *et* $abcd$, *les quatre plans* (a, α), (b, β), (c, γ) *et* (d, δ) *ont un point commun* K [1].

Appelons H' *le point de rencontre des perpendicu-*

---

[1] Ce fait rentre dans un théorème général qui est l'extension à l'espace du théorème plan donné par M. Bricard (note précédente) :

Étant donnés deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D', *si les droites* AA', BB', CC', DD' *rencontrent respectivement les plans* a, b, c, d *des faces du premier tétraèdre en quatre points situés dans un même plan, les droites* (a, a'), (b, b'), ... *déterminent avec les sommets* A', B', C', D' *du second tétraèdre quatre plans qui ont un point commun.*

Pour le théorème du texte, les deux tétraèdres sont le tétraèdre A'B'C'D' et le tétraèdre pédal.

laires aux plans des faces menées par leurs centres de gravité, ou l'orthocentre du tétraèdre A'B'C'D' : *si le point* S *se déplace sur une droite* σ *passant par le point* H', *le point* K *reste fixe; les points* A'', B'', C'', D'' *étant les points des segments* HA, HB, HC, HD *qui vérifient les relations*

$$\frac{HA''}{HA} = \frac{HB''}{HB} = \frac{HC''}{HC} = \frac{HD''}{HD} = \frac{2}{3},$$

les projections du point K *sur les plans des faces du tétraèdre* A''B''C''D'' *sont dans un même plan, ou encore, si l'on abaisse du point* K *des perpendiculaires sur les plans des faces de ce tétraèdre, et si on les prolonge du double de leur longueur, les points obtenus,* K_1', K_2'', K_3, K_4, *sont dans un plan* Σ *qui passe nécessairement en* H, *et ce plan* Σ *est perpendiculaire à la droite* H'S *ou* σ.

Il y a donc un lieu du point K, *et ce lieu est la surface du troisième ordre* $\mathcal{K}$ *dont il a été parlé.*

Si l'on se donne le point S, ou plutôt la droite H'S ou σ, pour avoir le point K, on mène par H le plan Σ perpendiculaire à σ : ce plan Σ coupe les plans des faces du tétraèdre A''B''C''D'' suivant des droites 1'', 2'', 3'', 4'' ; si H_1'', H_2', H_3', H_4' désignent les points obtenus en abaissant du point H des perpendiculaires sur les plans des faces de ce tétraèdre et en les prolongeant de la moitié de leur longueur, *c'est-à-dire les pieds des hauteurs du tétraèdre* ABCD, le plan qui passe par le point H_1 et la droite 1'', et les trois plans analogues, passent par le point K.

8. Quand on projette un point K sur les plans des faces d'un trièdre A'', le plan déterminé par les projections de ce point est perpendiculaire à la droite inverse

de la droite $A''K$ par rapport au trièdre; les droites inverses des droites $A''K$, $B''K$, $C''K''$, par rapport aux trièdres A'', B'', C'', D'' du tétraèdre $A''B''C''D''$ sont donc perpendiculaires au plan Σ ou parallèles à la droite σ. On en conclut aisément ceci : *Les coordonnées du point* K, *rapporté au tétraèdre* $A''B''C''D''$, *sont inversement proportionnelles aux distances algébriques du point* S *aux plans orientés menés par* H' *parallèlement aux plans des faces de ce tétraèdre.*

III. — Résumé des calculs.

9. Voici un résumé succinct des calculs qui m'ont donné les résultats précédents.

J'ai pris le tétraèdre ABCD, d'abord supposé quelconque, comme tétraèdre de référence; j'ai désigné par A, B, C les cosinus des dièdres *extérieurs* du trièdre D, par A', B', C' les cosinus des dièdres extérieurs opposés; j'ai appelé $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ les sinus des trièdres supplémentaires de ceux du tétraèdre, c'est-à-dire les sinus des trièdres qui empruntent leurs arêtes aux axes X, Y, Z, T des faces du tétraèdre, ces axes étant supposés concourants. On a

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{l} A'\mathcal{A} - B'\mathcal{B} + C'\mathcal{C} + \mathcal{D} = 0, \\ A'\mathcal{D} - B\mathcal{C} + C\mathcal{B} + \mathcal{A} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

la seconde relation se déduisant de la première en mettant B et C au lieu de B' et C', et en échangeant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$; on a encore

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}^2 = 1 - A^2 - B^2 - C^2 - 2ABC, \\ \mathcal{A}^2 = 1 - A^2 - B'^2 - C'^2 - 2AB'C', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

$$
\text{(III)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
\mathfrak{D}\mathfrak{A} = -A' + A^2A' - ABB' - ACC' + BC' + CB', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{B}\mathfrak{C} = -A + A'^2A - A'BB' - A'CC' + BC + B'C', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \right.
$$

10. Les coordonnées normales du point S étant p, q, r, s, celles des points a, b, c, d sont respectivement

$$
\begin{array}{lllll}
(a) & 0, & q - pC, & r - pB, & s - pA', \\
(b) & p - qC, & 0, & r - qA, & s - qB', \\
(c) & p - rB, & q - rA, & 0, & s - rC', \\
(d) & p - sA', & q - sB', & r - sC', & 0,
\end{array}
$$

et le déterminant de ces quantités a pour valeur

$$-(\mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q + \ldots)(\mathfrak{A}qrs + \mathfrak{B}rsp + \ldots);$$

l'équation du plan (a, α) est alors

$$
\begin{vmatrix}
x & y & z & t \\
p - qC & 0 & r - qA & s - qB' \\
p - rB & q - rA & 0 & s - rC' \\
p - sA' & q - sB' & r - sC' & 0
\end{vmatrix}
+ (\mathfrak{A}qrs + \mathfrak{B}rsp + \ldots)(\mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D}t - 2\mathfrak{A}x) = 0.
$$

Si l'on ajoute les équations des quatre plans (a, α), (b, β), ..., on a une identité.

11. Pour avoir les coordonnées du point K, j'ai considéré les équations des trois premiers plans, soit

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad X_3 = 0,$$

et j'ai ordonné les coefficients par rapport à s en posant

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \mathfrak{A}qrs + \mathfrak{B}rsp + \ldots \\
&= s(\mathfrak{A}qr + \mathfrak{B}rp + \mathfrak{C}pq) + \mathfrak{D}pqr.
\end{aligned}
$$

Ces coefficients renferment au troisième degré les coordonnées p, q, r, s du point S. J'ai formé d'abord la combinaison

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0,$$

puis les combinaisons

$$3pX_1 + 4s(X_1 + X_2 + X_3) = 0, \qquad \ldots, \qquad \ldots;$$

elles sont divisibles par Σ, et l'on obtient ainsi trois équations dont les coefficients renferment p, q, r, s au premier degré seulement.

12. Le tétraèdre étant maintenant supposé orthocentrique, on a

$$AA' = BB' = CC' = DD',$$

et l'on peut poser

$$A = \beta\gamma, \qquad B = \gamma\alpha, \qquad C = \alpha\beta,$$
$$A' = \delta\alpha, \qquad B' = \delta\beta, \qquad C' = \delta\gamma;$$

les coordonnées de l'orthocentre sont proportionnelles à α, β, γ, δ, et celles du point H' vérifient les relations

$$\alpha x = \beta y = \gamma z = \delta t.$$

Les coefficients des équations, transformés par l'introduction des quantités α, β, γ, δ, s'expriment au moyen des binomes

$$\delta s - \alpha p, \qquad \ldots, \qquad \beta q - \gamma r, \qquad \ldots,$$

qui sont les coordonnées de la droite H'S ou σ.

Le point K dépend donc seulement de cette droite σ, et il y a un lieu du point K.

13. La relation entre les quantités A, B, C, ...

est ici

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \ldots + \ldots = -1,$$

ou encore

$$\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\beta^2} + \ldots + \ldots = 3;$$

on a

$$\mathcal{D}\mathcal{A} = -\delta\alpha(1-\beta^2)(1-\gamma^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathcal{B}\mathcal{C} = -\beta\gamma(1-\alpha^2)(1-\delta^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\mathcal{A}(1-\alpha^2)}{\alpha} = \frac{\mathcal{B}(1-\beta^2)}{\beta} = \ldots = \frac{\mathcal{D}(1-\delta^2)}{\delta};$$

en appelant a, b, c, d les coordonnées normales de l'orthocentre, la relation entre les coordonnées normales d'un point est alors

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\frac{x}{a} + \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\frac{y}{b} + \ldots + \ldots = -1.$$

Au moyen de cette relation, il arrive que l'on peut faire disparaître y et z de la première des équations qui déterminent le point K; en posant

$$x = x'' + \frac{a}{3}, \qquad y = y'' + \frac{b}{3}, \qquad \ldots,$$

on trouve

$$\frac{x''}{\alpha}\left(\frac{\alpha p}{1-\alpha^2} + \frac{\beta q}{1-\beta^2} + \frac{\gamma r}{1-\gamma^2} + \frac{\delta s}{1-\delta^2} - 3\alpha p\right) + \ldots + \ldots + \ldots;$$

et l'on vérifie aisément que l'on a

$$\frac{\mathcal{A}}{x''} + \frac{\mathcal{B}}{y''} + \frac{\mathcal{C}}{z} + \frac{\mathcal{D}}{t} = 0;$$

le lieu du point K est donc la surface $\mathcal{K}$.

14. Si l'on suppose que p, q, r, s représentent des

coordonnées normales, on obtient

$$\frac{x^2}{\alpha}\left(1-3\alpha^2\frac{p}{a}\right)=\frac{y^2}{\beta}\left(1-3\beta^2\frac{q}{b}\right)=\ldots=\ldots;$$

en posant

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\ldots=\ldots=l,$$

on a donc

$$x^2\left(p-\frac{l}{3\alpha}\right)=y^2\left(q-\frac{l}{3\beta}\right)=\ldots=\ldots.$$

Or, si x_0, y_0, ... sont les coordonnées normales du point H′, on a

$$\alpha x_0=\beta y_0=\ldots=\ldots=\frac{-l}{3};$$

on a finalement

$$x^2(p-x_0)=y^2(q-y_0)=\ldots=\ldots.$$

C'est le résultat indiqué à la fin du n° 8, et duquel il résulte que le plan Σ est perpendiculaire à la droite σ.

(Si les dièdres du tétraèdre ABCD sont aigus, comme on a par exemple $\alpha^2=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{A}}$, les quantités α, β, γ, δ sont des imaginaires pures; si l'on pose $\alpha=\alpha' i$, $\beta=\beta' i$, ..., on a

$$\frac{a}{\alpha' i}=\frac{b}{\beta' i}=\ldots=l=\frac{l'}{i},$$

et les égalités relatives à x_0, y_0, ... deviennent

$$\alpha' x_0=\beta' y_0=\ldots=\ldots=\frac{l'}{3}.\ )$$

Note. — Revenons à la Géométrie plane.

a. Soit Ω le milieu commun des segments A′A″, B′B″, C′C″. La droite de Steiner du point K par rap-

port au triangle $A''B''C''$ étant la droite Σ, si K' est le symétrique de K par rapport à Ω, la droite de Steiner du point K' par rapport au triangle $A'B'C'$ est la parallèle à Σ menée par H'; comme K' et K sont diamétralement opposés sur le cercle $A'B'C'$, *la droite de Steiner du point* K *par rapport au triangle* $A'B'C'$ *est perpendiculaire à celle du point* K', *et se confond par suite avec la droite* σ. Donc, si l'on se donne la droite σ, en traçant les droites symétriques de celle-là par rapport aux côtés du triangle $A'B'C'$ (ce qui peut se faire en joignant les points $1'$, $2'$, $3'$ où la droite σ coupe les côtés de ce triangle aux points H'_1, H'_2, H'_3 qui sont les symétriques de H' par rapport aux côtés de ce même triangle), on aura trois droites qui iront concourir au point K. Cette propriété de la droite σ n'est d'ailleurs pas susceptible d'extension à l'espace : il y a entre les deux droites σ et Σ cette différence essentielle, au point de vue de l'extension à l'espace, que la droite Σ a pour analogue un plan Σ, tandis que la droite σ a pour analogue une droite σ.

La propriété de la droite σ qui vient d'être indiquée a été signalée par M. Bricard, dans une Note où il a établi géométriquement le théorème plan dont j'avais donné une démonstration analytique, et avant que j'eusse rencontré de mon côté la propriété du plan Σ.

b. Soit S_1 le point inverse du point S par rapport au triangle ABC. Les deux points S et S_1 ont même cercle pédal, et celui-ci rencontre le cercle des neuf points en deux points K et K_1, qui sont précisément le point K relatif à la droite $H'S$ et le point K_1 relatif à la droite $H'S_1$. Lorsque la droite SS_1 passe en H', les deux points K et K_1 se confondent, et le cercle pédal est tangent en K au cercle des neuf points. Plus par-

ticulièrement, si S et S_1 se confondent avec le centre I d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, le cercle pédal est précisément ce cercle, qui est ainsi tangent au cercle des neuf points.

Étant donné un triangle ABC *dont les hauteurs* AD, BE, CF *se coupent en* H, *soient* A″, B″, C″ *les milieux des segments* HA, HB, HC; *si* O *et* I *sont les centres du cercle circonscrit et du cercle inscrit, la perpendiculaire menée par* H *à la droite* OI *rencontre les côtés du triangle* A″B″C″ *en trois points* X, Y, Z, *et les droites* DX, EY, FZ *concourent en un point qui est le point de contact du cercle inscrit avec le cercle des neuf points.*

Ou encore (construction de M. Bricard, quest. 2036) :

Les milieux des côtés du triangle ABC *étant* A′, B′, C′, *la droite* OI *rencontre les côtés du triangle* A′B′C′ *en des points* U, V, W, *et si* O_1, O_2, O_3 *sont les symétriques de* O *par rapport aux côtés de ce triangle, les droites* O_1U, O_1V, O_1W *concourent en un point qui est le point de contact du cercle inscrit avec le cercle des neuf points.*

Si le cercle des neuf points est supposé tracé, comme D et O_1 sont sur ce cercle, on aura sans ambiguïté le point cherché en traçant seulement la droite DX, ou la droite O_1U.

(Le lieu des points inverses S et S_1 tels que la droite SS_1 passe au centre H′ du cercle ABC est une cubique circonscrite au triangle ABC et passant en H′ : toute droite passant par H′ est encore rencontrée par la cubique en deux points inverses; le point inverse de A est sur BC, ...; le point inverse de H′ est l'or-

thocentre H, de sorte que la tangente en H′ passe en H; les quatre tangentes que l'on peut mener de H′ à la cubique ont pour points de contact les centres I, I′, I″, I‴ des cercles tangents aux trois côtés du triangle. Aux points à l'infini sur la cubique, S, S′, S″, et à leurs inverses, S_1, S'_1, S''_1, correspondent trois droites de Simson tangentes au cercle des neuf points : ce sont les tangentes aux points de contact de ce cercle avec l'hypocycloïde à trois rebroussements qui est l'enveloppe des droites de Simson relatives au triangle ABC.)

[P6b]

SUR LA GÉOMÉTRIE DE DIRECTION;

Par M. R. BRICARD.

1. Laguerre paraît avoir le premier introduit en Géométrie plane l'étude systématique des droites dirigées ou *semi-droites*, des cercles dirigés ou *cycles*. Il a fait connaître une transformation fort intéressante, la *transformation par semi-droites réciproques*, qui joue, dans la Géométrie de direction, un rôle analogue à celui que joue l'inversion dans la Géométrie ordinaire.

Les recherches de Laguerre ont été publiées dans plusieurs Mémoires, parus dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* et dans les *Nouvelles Annales* (¹).

(¹) En voici la liste complète :

Sur la Géométrie de direction (*S. M.*, 1879, p. 80; *Œuvres*, p. 592).

Plusieurs de ces travaux, surtout ceux qui sont relatifs aux principes de la théorie, ne contiennent que des résultats sans démonstration; en outre, ici comme en d'autres occasions, Laguerre n'a certainement pas mis en lumière ses idées directrices, et son exposition prend de ce fait un caractère artificiel qui rend la lecture de ces Mémoires un peu difficile.

Il est assez vraisemblable que l'éminent géomètre a été conduit à plusieurs des notions qu'il a introduites dans la Géométrie de direction, et particulièrement à sa transformation par semi-droites réciproques ([1]), par des considérations de Géométrie dans l'espace. Je vais, du moins, chercher à montrer comment de telles considérations conduisent de la façon la plus naturelle à cette transformation, dont Laguerre n'a pas révélé l'origine.

2. Soit (P) un plan que je supposerai horizontal, de manière à pouvoir parler des régions de l'espace qui

---

Sur la transformation par directions réciproques (*C. R.*, [illegible]; *Œuvres*, p. 604).

Transformations par semi-droites réciproques (*N. A.*, [illegible]; *Œuvres*, p. [illegible]).

Sur les hypercycles (*C. R.*, [illegible]; *Œuvres*, p. [illegible]).

Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles (*N. A.*, [illegible]; *Œuvres*, p. [illegible]).

Sur quelques propriétés des cycles (*N. A.*, [illegible]; *Œuvres*, p. [illegible]).

Sur les courbes de direction de la troisième classe (*N. A.*, 1883; *Œuvres*, p. 660).

Sur l'application des intégrales elliptiques et ultra-elliptiques à la théorie des courbes unicursales (*C. R.*, [illegible]; *Œuvres*, p. [illegible]).

Sur les anticaustiques par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe (*N. A.*, 1885; *Œuvres*, p. 675).

([1]) Ou plutôt à ses *transformations*, car il y en a deux très distinctes, comme on le verra plus loin.

sont l'une au-dessus, l'autre au-dessous du plan. Soit δ une *semi-droite* du plan (P), c'est-à-dire une droite à laquelle on attribue un sens. Par δ je puis faire passer deux plans, (D) et (D'), faisant tous deux des angles de 45° ([1]) avec le plan (P).

Imaginons maintenant un observateur, debout sur le plan (P) et se déplaçant suivant δ, dans le sens de cette semi-droite. L'un des deux plans (D) et (D') fait avec le plan (P) un dièdre aigu situé à la *gauche* de l'observateur dont il s'agit. Je ferai correspondre ce plan à la semi-droite δ.

Je ferai donc ainsi correspondre, à toute semi-droite du plan (P), *un plan faisant un angle de* 45° *avec le premier, et parfaitement déterminé.*

Réciproquement, il est évident qu'à tout plan (D) *faisant un angle de* 45° *avec le plan* (P) *correspond une semi-droite parfaitement déterminée* δ, *portée par la trace du plan* (D) *sur le plan* (P).

Je dirai que le plan (P) est représentatif de la semi-droite δ.

Considérons maintenant un *cycle* Γ du plan (P), c'est-à-dire un cercle auquel on attache un sens. Par Γ passent deux cônes de révolution (G) et (G'), ayant tous deux un angle au sommet de 90°. L'un de ces cônes a son sommet au-dessus du plan (P), l'autre a son sommet au-dessous de ce plan. *Je ferai correspondre à* Γ *le premier de ces cônes, si* Γ *est* sinistrorsum, *c'est-à-dire si le sens de* Γ *est contraire à celui des aiguilles d'une montre, et le second de ces cônes, dans le cas contraire.* Réciproquement, à tout cône de

([1]) Cet angle de 45° n'est introduit que pour fixer les idées, je pourrais le remplacer par un angle quelconque *non droit.*

révolution (G), ayant un angle au sommet de 90° et son axe vertical, correspond un cycle parfaitement déterminé, porté par la trace du cône sur le plan (P). Ce cycle est *sinistrorsum*, si (G) a son sommet au-dessus du plan (P), et *dextrorsum* dans le cas contraire.

Je dirai que (G) est le *cône représentatif* du cycle Γ.

Cela posé, soient δ une semi-droite et Γ un cycle du plan (P). On dit que δ touche Γ, si la droite qui porte δ touche le cercle qui porte Γ, et si, en outre, les éléments en contact du cercle et de la droite ont le même sens. On voit très aisément que *la condition nécessaire et suffisante pour que δ touche Γ est que le plan* (D), *représentatif de δ, soit tangent au cône* (G), *représentatif de* Γ.

Remarquons enfin que tous les plans (D) sont tangents à un même cercle C situé dans le plan de l'infini, ayant pour équations en coordonnées rectangulaires homogènes (on suppose Ox et Oy dans le plan P)

$$t = 0, \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Tous les cônes (G) sont les cônes du second ordre qui contiennent ce cercle C. On peut donc ainsi résumer les considérations qui précèdent :

A toute semi-droite du plan (P) *correspond d'une manière univoque un plan qui touche* C; *à tout cycle du plan* (P) *correspond, d'une manière univoque, un cône du second ordre contenant* C. *Une semi-droite et un cycle sont tangents entre eux si le plan et le cône correspondants sont tangents entre eux.*

3. Il est maintenant avantageux (mais non essentiel) d'avoir recours à une transformation par polaires réci-

proques, ayant pour base la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

dans le système de coordonnées précédemment défini. Le cercle C a pour transformé le cône (C) dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Tout plan (D) a pour pôle un point d du cône (C); tout cône (G) a pour transformé une conique G tracée sur le cône (C).

Par suite :

Les semi-droites et les cycles du plan (P) *correspondent d'une façon univoque aux points du cône* (C) *et aux coniques tracées sur ce cône.* Je dirai qu'un point du cône est *représentatif* d'une semi-droite et qu'une conique tracée sur le cône est *représentative* d'un cycle.

La Géométrie de direction dans le plan (P) se trouve ainsi ramenée à l'étude des figures tracées sur le cône (C).

On se rend compte immédiatement des propositions suivantes :

Une semi-droite et son opposée, c'est-à-dire la seconde semi-droite portée par la même droite, ont en général des points représentatifs distincts, symétriques par rapport au plan (P). *Il n'y a d'exception que pour les semi-droites isotropes : une telle semi-droite et son opposée ont le même point représentatif, situé sur l'une des génératrices isotropes du cône* (C).

En particulier, la droite de l'infini du plan (P) *n'a qu'un point représentatif, qui est le sommet du cône* (C).

Si une semi-droite δ *enveloppe un cycle* Γ, *son point*

représentatif d décrit la conique G, représentative du cycle Γ.

Il y a d'ailleurs correspondance homographique entre le point d, mobile sur G, et la semi droite δ, tangente mobile de Γ.

Dans le cas où le cycle Γ a son rayon nul, c'est-à-dire si la semi-droite δ passe par un point fixe, la conique G est située dans un plan vertical.

Si plusieurs semi-droites sont parallèles, leurs points représentatifs sont situés sur une même génératrice du cône (C).

Le faisceau constitué par des semi-droites parallèles et la ponctuelle constituée par leurs points représentatifs se correspondent homographiquement.

On voit enfin que, étant définie une transformation ponctuelle quelconque du cône (C) en lui-même, on peut en déduire une transformation qui établit une correspondance entre les semi-droites du plan (P).

Parmi les transformations de cette nature, les plus intéressantes sont les transformations par semi-droites réciproques. Pour y arriver, il est nécessaire d'étudier tout d'abord les *transformations homographiques involutives du cône* (C) *en lui-même*.

4. *Transformations homographiques involutives du cône* (C) *en lui-même.* — Une transformation homographique générale de l'espace dépend de 15 paramètres. Si l'on cherche à déterminer cette transformation de telle manière qu'elle change le cône (C) en lui-même, on l'assujettit à 8 conditions. Il existe donc ∞^7 transformations homographiques jouissant de la propriété énoncée. Une telle transformation change les points et les coniques du cône (C) en éléments de

même nom. Considérons maintenant ces points et ces coniques comme représentatifs des semi-droites et des cycles du plan (P). On voit ainsi que l'on peut définir, dans le plan (P), ∞^7 transformations qui changent les semi-droites en semi-droites et les cycles en cycles.

Je réserve, pour une autre occasion, l'étude de ces transformations générales. Je me contenterai d'étudier ici celles d'entre elles qui présentent un caractère involutif.

Pour les définir, je rappelle qu'il existe dans l'espace deux espèces de transformations homographiques involutives :

1° *L'homologie involutive*, définie par un point (*sommet de l'homologie*) et un plan (*plan de base de l'homologie*); deux points correspondants sont en ligne droite avec le sommet; de plus, les deux points divisent harmoniquement le segment limité par la trace sur le plan de base de la droite qui les joint et par le sommet.

L'homologie involutive a une infinité de points doubles : ce sont le sommet et tous les points du plan de base.

2° *L'homographie axiale involutive*, définie par deux droites qui ne se rencontrent pas (*axes de l'homographie*); deux points correspondants sont tels que la droite qui les joint rencontre les deux axes; de plus, les deux points divisent harmoniquement le segment limité par les deux points de rencontre de la droite qui les joint et des axes.

L'homographie axiale involutive a une infinité de points doubles : ce sont les points des deux axes.

Examinons à présent dans quels cas l'une de ces homographies peut transformer un cône du second ordre en lui-même.

1° *Cas de l'homologie involutive.* — Le sommet du cône devant se correspondre à lui-même doit être au point double de l'homologie. Il y a deux cas à distinguer :

(*a*). *Le sommet du cône est au sommet de l'homologie ;* il est bien clair alors que, quelles que soient les autres conditions qui définissent la transformation, le cône est transformé en lui-même ;

(*b*). *Le sommet du cône est dans le plan de base de l'homologie ;* alors, le sommet S de l'homologie est en dehors du cône, et il est visible que le plan de base doit être le plan polaire du point S par rapport au cône. Réciproquement, toute homologie involutive ayant pour sommet un point quelconque de l'espace et pour plan de base le plan polaire de ce point par rapport au cône transforme le cône en lui-même.

2° (*c*). *Cas de l'homographie axiale involutive.* — Le sommet du cône doit être sur l'un des axes, et les deux axes sont évidemment des droites conjuguées par rapport au cône. Réciproquement, toute homographie axiale involutive, dont les axes sont conjugués par rapport au cône, transforme le cône en lui-même.

Il y a donc trois espèces bien distinctes de transformations homographiques involutives qui transforment un cône en lui-même. Les deux premières, (*a*) et (*b*), dépendent de trois paramètres; la troisième, (*c*), dépend de quatre paramètres.

Dans les transformations (*a*) et (*b*), il existe une infinité de points doubles, le sommet du cône et tous les points de la ligne commune au cône et au plan de base de l'homologie. Cette ligne est une *conique* dans la transformation (*a*), un *système de deux génératrices* dans la transformation (*b*).

Dans la transformation (c), il n'y a que trois points doubles, qui sont les points où le cône est rencontré par les axes de l'homographie, deux de ces points étant confondus au sommet du cône.

5. *Transformations par semi-droites réciproques.* — Examinons successivement les transformations par semi-droites du plan (P), qui sont *figurées* par les transformations (a), (b), (c) définies précédemment.

Nous désignerons ces nouvelles transformations respectivement par (α), (β) et (γ).

Transformation (α). — Il existe sur le cône (C), dans la transformation (a), une conique G qui se correspond à elle-même. Donc, dans la transformation (α), *il existe un cycle* Γ *qui se correspond à lui-même.*

Soient m, m' deux points du cône (C) conjugués dans la transformation (a). Ils sont sur une même génératrice du cône, et, si l'on appelle O le sommet du cône, p le point où mm' rencontre la conique G, les points m et m' divisent harmoniquement le segment Op. En appliquant les remarques faites à la fin du n° 3, on voit immédiatement que :

Si l'on appelle μ *et* μ' *deux semi-droites se correspondant dans la transformation* (α), *ces semi-droites sont parallèles et, de plus, la semi-droite* ϖ *parallèle à* μ *et* μ' *et équidistante de ces deux semi-droites touche le cycle* Γ.

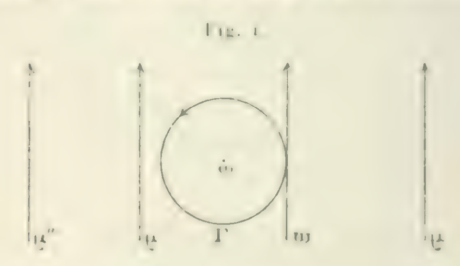
La transformation (α) est ainsi définie sans ambiguïté par le cycle Γ.

Construisons (*fig.* 1) la semi-droite μ'', parallèle à μ', et telle que le point ω, centre de Γ, soit équidistant de μ et de μ''. On voit tout de suite que la droite μ''

est *à gauche* ou *à droite* de μ, suivant que le cycle Γ est *sinistrorsum* ou *dextrorsum*, et que la distance de μ à μ' est égale au double du rayon du cycle Γ.

On peut donc passer de μ à μ' en construisant μ'', parallèle à μ, de même sens et d'un côté déterminé de

Fig. 1.



cette semi-droite, puis en construisant μ', symétrique, en position, de μ'' par rapport à ω et de même sens.

Autrement dit, la transformation (α) n'est qu'une combinaison de deux transformations bien connues : la *transformation parallèle* ou *dilatation* et la *symétrie par rapport à un point*.

Transformation (β). — Dans la transformation (b), deux points conjugués m et m' sont en ligne droite avec un point fixe s de l'espace. Soient μ et μ' les semi-droites du plan (P) correspondant à m et m'; (M) et (M') leurs plans représentatifs. Ces plans, qui sont les plans polaires des points m et m' par rapport à la sphère

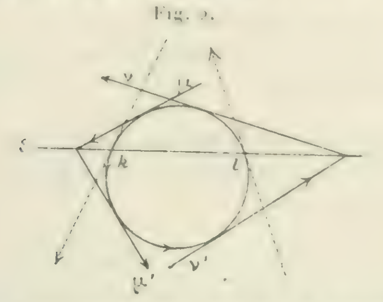
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

se coupent suivant une droite qui appartient au plan (S), plan polaire du point s par rapport à la même sphère. Donc les semi-droites μ et μ', qui sont les traces des plans (M) et (M') sur le plan (P), se coupent sur la droite S, trace du plan (S) sur le plan (P). Ainsi :

Deux semi-droites μ *et* μ', *se correspondant dans la transformation* (β), *se coupent sur une droite fixe* S.

Soient, en second lieu, deux couples de points du cône (C) (m, m'), (n, n'), conjugués dans la transfor-

Fig. 2.



mation (b). Les points m, m', n, n' étant dans un même plan sont sur une même conique du cône (C). Par suite :

Quatre semi-droites μ, μ', ν, ν', *conjuguées deux à deux dans la transformation* (β), *sont tangentes à un même cycle.*

Il suffit dès lors, pour définir la transformation (β), de se donner la droite S et un couple de semi-droites conjuguées, μ et μ', se coupant sur la droite S. Pour construire la semi-droite conjuguée d'une semi-droite quelconque ν, on construira le cycle qui touche μ, μ' et ν et, par le point où ν coupe S, on mènera la seconde droite ν' qui touche ce cycle (*fig.* 2).

On vérifie bien que la transformation (β) dépend de trois paramètres : il faut, en effet, pour la définir se donner la droite S (deux paramètres) et la semi-droite conjuguée d'une droite donnée (un seul paramètre, puisque cette conjuguée est assujettie à passer par un point connu).

On vérifie facilement aussi qu'il existe dans la transformation (β) une infinité de droites doubles, parallèles à l'une ou l'autre de deux directions fixes : on les obtient de la manière suivante :

Soient k et l les points de rencontre de S et d'un cycle quelconque qui touche μ et μ' : les tangentes à ce cycle aux points k et l sont des semi-droites de directions bien déterminées :

Toute semi-droite parallèle à l'une ou l'autre de ces tangentes se confond avec sa conjuguée dans la transformation (β).

Ce fait concorde bien avec celui qu'il existe, dans la transformation (b) définie sur le cône (C), une infinité de points doubles répartis sur deux génératrices.

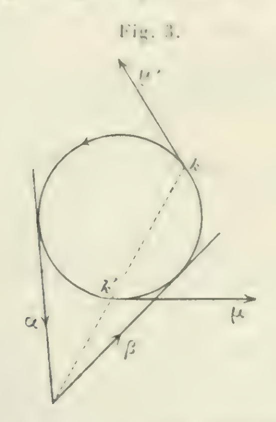
Transformation (γ). — Soient m, m' deux points du cône (C), conjugués dans la transformation (c). La droite mm' rencontre, comme on l'a vu, deux droites A et B, conjuguées par rapport au cône. L'une d'elles, A, passe par le sommet du cône; l'autre le rencontre en deux points a et b qui sont des points doubles de la transformation. Il en résulte que les points a, b, m, m' sont sur une même conique du cône (C), et que, sur cette conique, les points m et m' sont conjugués harmoniques par rapport aux points a et b.

On conclut immédiatement de là que :

Dans la transformation (γ) *il existe deux semi-droites doubles* α *et* β. *Si* μ *et* μ' *sont deux semi-droites conjuguées quelconques, les semi-droites* α, β, μ, μ' *sont tangentes à un même cycle, et de plus les tangentes* μ *et* μ' *sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes* α *et* β.

La transformation est ainsi définie par ses deux semi-droites doubles α et β (quatre paramètres). Pour construire la semi-droite μ', conjuguée d'une semi-droite donnée μ, on opérera de la manière suivante : on construira (*fig.* 3) le cycle qui touche α, β et μ et l'on

Fig. 3.



joindra le point de contact de μ au point de rencontre de α et de β. Cette droite rencontre le cycle en un second point; en menant en ce point la tangente au cycle, on obtient la semi-droite cherchée μ'.

La transformation définie par Laguerre dans le premier des Mémoires énumérés au début de ce travail est la transformation (β). Vers la fin du Mémoire, on lit la Note suivante (p. 601 des *Œuvres*) :

Depuis que cette Note a été communiquée à la Société, j'ai reconnu qu'il était utile de modifier légèrement la définition précédente de la transformation par directions réciproques [1]; je développerai ce point dans une prochaine Communication.

En effet, dans tous ses travaux ultérieurs, Laguerre

---

[1] Laguerre n'a adopté que plus tard l'expression de *semi-droite;* il disait alors : *direction.*

a utilisé exclusivement la transformation (β); mais, chose assez singulière, sans plus jamais parler des différences qui la séparent de la transformation (γ), considérée en premier, et qui sont plus que des « modifications légères ». [Je rappelle que la transformation (γ) dépend de quatre paramètres, et la transformation (β) de trois seulement; que la transformation (γ) n'a que deux semi-droites doubles et la transformation (β) une infinité.]

Laguerre n'a pas signalé la transformation (α).

6. Il n'entre pas dans le plan de ce travail de pousser à fond l'étude des transformations par semi-droites réciproques : ce serait, la plupart du temps, répéter inutilement ce qu'a déjà dit Laguerre. J'examinerai seulement le problème suivant, que Laguerre a passé sous silence, malgré son importance qui me paraît fondamentale :

Une semi-droite μ varie en restant tangente à une courbe donnée; la semi-droite μ', conjuguée de μ dans l'une des transformations (α), (β), (γ), enveloppe une courbe qui est la transformée de la première. Comment construire le point de contact q' de μ' avec son enveloppe, connaissant le point analogue q, relatif à la semi-droite μ?

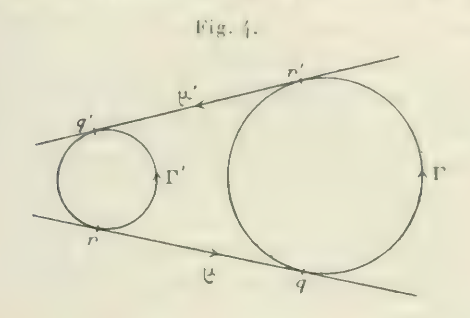
Il est clair tout d'abord que, la transformation envisagée étant de contact, le point q' ne dépend que du point q, et nullement de la nature de l'enveloppe de la droite μ.

Nous pouvons donc imaginer (*fig.* 4) que l'enveloppe de μ est le cycle bien déterminé Γ, qui touche μ' et μ, cette dernière semi-droite au point q. Le transformé Γ' de Γ touchera aussi μ et μ', cette dernière

droite au point cherché q'. Appelons r le point où le cycle Γ' touche la semi-droite μ.

La transformation considérée étant involutive, si l'on fait varier le point q, ce point et le point r vont engendrer une involution sur la semi-droite μ. Remar-

Fig. 4.



quons en outre que, si le cycle Γ s'éloigne à l'infini, il en est de même du cycle Γ' : *donc le point q et le point r engendrent sur la semi-droite μ une involution dont un point double est rejeté à l'infini.*

Or il existe sur une droite deux espèces d'involution de cette nature : l'*involution identique*, qui fait se correspondre un point à lui-même, et la *symétrie*, dans laquelle deux points conjugués sont symétriques par rapport à un point fixe de la droite. C'est l'une ou l'autre de ces involutions qui entre en jeu, suivant que l'on a affaire à la transformation (α), (β) ou (γ). Je laisse de côté la transformation (α), pour les raisons données plus haut. Disons seulement que l'involution à laquelle elle donne lieu est une *symétrie;* on le voit immédiatement.

Dans le cas de la transformation (β), tout cycle tangent à μ et μ' se transforme en lui-même. On a donc ici une *involution identique*.

Dans le cas de la transformation (γ), un cycle tan-

gent à μ et μ' ne se transforme en lui-même que s'il est aussi tangent aux droites doubles α et α'. On trouve donc une symétrie dont le *centre* est le point h de la figure 3.

De la relation entre les points q et r, on passe immédiatement à la relation entre les points q et q'. On parvient ainsi aux constructions suivantes, que l'on peut énoncer d'une façon précise, en remarquant qu'un segment d'origine et d'extrémité données, porté par une semi-droite donnée, est bien défini en grandeur et en signe :

Dans le cas de la transformation (β), *si l'on désigne par l le point de rencontre des semi-droites μ et μ', on a la relation*

$$lq' = -lq.$$

Dans le cas de la transformation (γ), *si l'on désigne par k et k' les points de contact respectifs des semi-droites μ et μ' avec le cycle qui les touche ainsi que les semi-droites doubles de la transformation, on a*

$$k'q' = kq.$$

On déduit immédiatement de là le théorème fondamental suivant, donné par Laguerre :

Soient C et C_1 deux courbes, μ une semi-droite qui les touche respectivement aux points q et q_1, C', C'_1, μ', q', q'_1 les éléments qui leur correspondent respectivement dans une transformation (β) *ou* (γ).

On a, dans le cas de la transformation (β),

$$q'q'_1 = -qq_1,$$

et, dans le cas de la transformation (γ),

$$q'q'_1 = qq_1.$$

Autrement dit, la *distance tangentielle* de deux courbes est, en grandeur et en signe, un invariant pour la transformation (γ); la *valeur absolue* de cette distance tangentielle est un invariant pour la transformation (β).

7. *Hypercycles.* — Plusieurs des travaux que Laguerre a publiés sur la Géométrie de direction sont relatifs à des courbes qu'il a nommées *hypercycles*.

J'appellerai *hypercycle général* la courbe enveloppe des semi-droites du plan (P) qui ont pour points représentatifs les points d'une *biquadratique gauche tracée sur le cône* (C).

Autrement dit, un hypercycle général est la trace, sur le plan (P), de la développable circonscrite au cercle C et à une quadrique quelconque. On voit que l'hypercycle général est une courbe de quatrième classe, de genre *un*, dépendant de huit paramètres.

Dans le cas où la biquadratique représentative de l'hypercycle général passe par le sommet du cône, l'hypercycle devient unicursal. *Ce sont les hypercycles de cette nature que Laguerre a exclusivement considérés.*

Il est clair que les propriétés des biquadratiques permettent d'énoncer de nombreux théorèmes relatifs aux hypercycles généraux. Je me contenterai, pour ne pas allonger ce travail outre mesure, de donner à ce sujet quelques indications rapides.

Je désignerai par Υ l'hypercycle (en supprimant, pour plus de brièveté, le mot *général*) et par U sa biquadratique représentative.

On peut exprimer les coordonnées d'un point de U en fonctions elliptiques d'un paramètre, de telle manière que les arguments de quatre points de U situés

dans un même plan aient une somme nulle. Par suite :

On peut faire correspondre aux semi-droites tangentes à Υ des arguments elliptiques, tels que, si quatre tangentes ont des arguments dont la somme est nulle, ces quatre semi-droites sont tangentes à un même cycle.

Considérons maintenant les involutions de points sur la biquadratique U. On sait qu'il y en a de deux espèces. Dans une involution de la première espèce, deux points conjugués ont des arguments de somme constante et d'ailleurs quelconque ; dans une involution de la deuxième espèce, deux points conjugués ont des arguments dont la différence est l'une des trois demi-périodes ω_1, ω_2, ω_3.

Les involutions de la première espèce ne semblent conduire à un résultat intéressant que dans le cas où la somme constante des arguments est 0, ω_1, ω_2 ou ω_3. Les points conjugués de U sont alors alignés sur le sommet de l'un des quatre cônes qui contiennent cette courbe, y compris le cône (C). On en conclut que :

L'hypercycle Υ se correspond à lui-même dans une transformation (α) et dans trois transformations (β).

Le premier de ces résultats peut encore s'énoncer ainsi :

La semi-droite parallèle à deux tangentes parallèles de l'hypercycle et équidistante de ces deux tangentes enveloppe un cycle.

Théorème dont la démonstration directe est d'ailleurs immédiate.

Dans une involution de la deuxième espèce, deux points conjugués *m* et *m'* de U ont pour arguments

respectifs u et $u + \omega_1$, par exemple. La droite qui les joint rencontre, comme l'on sait, la droite qui joint le sommet du cône (C) au sommet de l'un des autres cônes passant par U, et aussi la droite qui joint les sommets des deux autres cônes. Ces deux droites sont d'ailleurs conjuguées par rapport au cône (C). Par suite :

L'hypercycle Υ se correspond à lui même dans trois transformations (γ).

Plus généralement, l'une quelconque des transformations (a), (b), (c) transforme U en une courbe de même nature. Donc :

Toute transformation (α), (β) *ou* (γ) *change un hypercycle en un autre hypercycle.*

Le premier de ces résultats peut encore s'énoncer ainsi :

Toute courbe parallèle à un hypercycle est un hypercycle.

Terminons ce paragraphe en montrant que l'on peut choisir la transformation (β) (¹) de manière à transformer Υ en une *conique*.

Il va sans dire que la transformation ne peut être birationnelle : il faut entendre que les semi-droites tangentes à Υ sont transformées, deux à deux, en les semi-droites opposées portées par une même tangente à une conique.

Il faut montrer qu'on peut choisir une homologie involutive (b), de telle manière qu'à la biquadratique U

(¹) La même chose pourrait se dire de la transformation (γ). On trouverait même une infinité de transformations de cette nature satisfaisant à la condition énoncée.

elle fasse correspondre une biquadratique U', ayant le plan (P) comme plan de symétrie. Autrement dit, soit s le sommet d'un cône autre que (C), contenant U. Il faut déterminer l'homologie involutive (b) de telle manière qu'elle transforme le point s en le point rejeté à l'infini dans la direction de la verticale.

Menons la verticale du point s; elle rencontre le cône (C) aux points i et k. Le centre de l'homologie cherchée doit évidemment se trouver en un point ω de cette droite et, si p est le point où le plan de base de l'homologie rencontre la même droite, les points i et k d'une part, s et le point à l'infini de ik de l'autre, doivent diviser harmoniquement le segment ωp (*fig.* 5).

Fig. 5.



Donc ω est l'un des points doubles de l'involution déterminée sur la droite ik par les couples (i, k), (s, ∞), et l'on obtient le point ω en prenant sur cette droite

$$s\omega = \pm\sqrt{si . sk}.$$

Ainsi, à chacun des cônes autres que (C) qui contiennent la biquadratique U correspondent deux homologies involutives satisfaisant à la condition énoncée. On peut donc énoncer finalement le résultat suivant :

Un hypercycle est, de six manières différentes,

le transformé d'une conique par une transformation (β) (¹).

8. Dans ce travail j'ai rattaché la géométrie de direction à la géométrie *sur un cône du second ordre*. En soumettant ce cône à une transformation par polaires réciproques, on rattachera la géométrie de direction à la géométrie *autour d'une conique*.

Les résultats prennent une forme particulièrement frappante si l'on suppose que cette conique est l'*ombilicale*. On peut ainsi faire dériver des similitudes de l'espace les transformations par semi-droites qui changent les cycles en cycles. En particulier, les transformations (α), (β), (γ) se rattachent aux transformations involutives de l'espace qui n'altèrent pas la grandeur des figures, et qui sont : *la symétrie par rapport à un point, la symétrie par rapport à un plan, la symétrie par rapport à une droite*.

Je reviendrai prochainement sur ce sujet et sur les transformations analogues de l'espace qui se rattachent aux *similitudes de l'espace à quatre dimensions*. Je montrerai en particulier qu'il existe dans l'espace *quatre* transformations par semi-plans réciproques, dérivant des *quatre* transformations involutives de l'espace à quatre dimensions, qui n'altèrent pas la grandeur des figures (symétrie par rapport à *un point, un plan, une droite, un espace*). Laguerre n'a fait connaître que la dernière de ces transformations (²).

(¹) Un passage du Mémoire *Sur les courbes de direction de la troisième classe* (*Œuvres*, p. 667) établit clairement que Laguerre rattachait l'hypercycle à la développable circonscrite à deux quadriques. Mais il ne paraît s'être attaché qu'au cas où cette développable est unicursale.

(²) Dans un article inséré au *Bulletin des Sciences mathématiques* (janvier 1906, p. 19), M. Butin a déjà rattaché la transformation de Laguerre à la symétrie par rapport à un espace linéaire (ou un *plan*, comme s'exprime M. Butin) dans l'espace à quatre dimensions.

[O5d, M²3a]

SUR LA SURFACE LIEU DES CENTRES DE COURBURE DES COURBES D'UNE SURFACE PASSANT PAR UN POINT DE CETTE SURFACE;

PAR M. JACQUES-JEAN CHAPELON,
Élève à l'École Polytechnique.

D'après le théorème de Meusnier, si l'on considère les courbes d'une surface Σ, passant par un point A de cette surface et tangentes à une tangente D à la surface au point A, le lieu de leurs centres de courbure est une circonférence, tangente en A à la surface et située dans un plan perpendiculaire à la droite D, de sorte que, lorsqu'on fait varier la droite D dans le plan tangent, le lieu des centres de courbure des courbes de la surface Σ passant en A est une surface S engendrée par des cercles.

Le but de cette Note est de faire connaître la propriété suivante de cette surface :

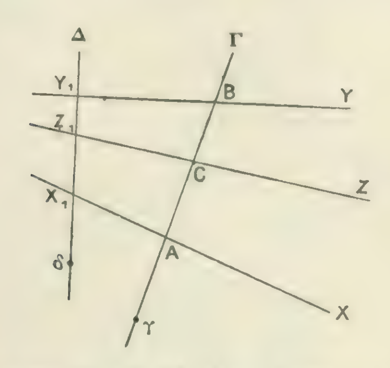
La transformée par inversion de S par rapport au point A pris comme pôle est un conoïde de Plucker.

Le *conoïde de Plucker*, que l'on appelle souvent aussi *cylindroïde*, peut être engendré de la manière suivante :

Considérons deux droites X, Y, rectangulaires, et leur perpendiculaire commune Δ (*fig.* 1). Par Δ, faisons passer un plan quelconque P que l'on prendra

comme plan directeur d'un paraboloïde passant par X et Y. Ce paraboloïde ayant évidemment ses deux plans directeurs rectangulaires est isoscèle, et l'une des génératrices Z, de même système que X et Y, est perpendiculaire au plan P. Lorsque ce plan P varie, le lieu

Fig. 1.



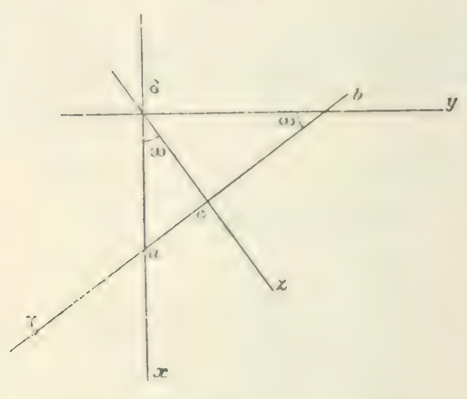
de Z est un conoïde de Plücker. Remarquons en passant que X et Y appartiennent au conoïde : il suffit pour le voir de prendre le plan P perpendiculaire à X, puis à Y; remarquons encore que la droite Z, étant perpendiculaire à toutes les génératrices du système Δ, est ligne de striction du paraboloïde Π, de sorte que l'on peut encore définir le conoïde de Plücker comme étant le lieu des lignes de striction des paraboloïdes isoscèles passant par deux droites rectangulaires.

Nous allons maintenant faire connaître une propriété du conoïde de Plücker le caractérisant et pouvant, par suite, lui servir de nouvelle définition :

Soit Γ une génératrice du paraboloïde Π, de même système que Δ; je considère la projection orthogonale de toute la figure sur un plan perpendiculaire à Δ en un point quelconque δ (*fig.* 2). On obtient ainsi trois droites x, y, z passant par δ et une droite γacb per-

pendiculaire à z. D'ailleurs

Fig. 2.



$$\frac{\delta X_1}{\gamma A} = \frac{\delta Z_1}{\gamma C} = \frac{\delta Y_1}{\gamma B},$$

$$\frac{\gamma A}{\gamma a} = \frac{\gamma C}{\gamma c} = \frac{\gamma B}{\gamma b},$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{\delta X_1}{\gamma a} = \frac{\delta Z_1}{\gamma c} = \frac{\delta Y_1}{\gamma b},$$

puis

$$\gamma c = \gamma a + ac;$$

mais

$$ac = a\delta \sin\omega, \qquad a\delta = ab \sin\omega.$$

d'où

$$\begin{aligned}\gamma c &= \gamma a + ab \sin^2\omega \\ &= \gamma a + (\gamma b - \gamma a)\sin^2\omega = \gamma a \cos^2\omega + \gamma b \sin^2\omega,\end{aligned}$$

donc, à cause des rapports (1),

$$\delta Z_1 = \delta X_1 \cos^2\omega + \delta Y_1 \sin^2\omega.$$

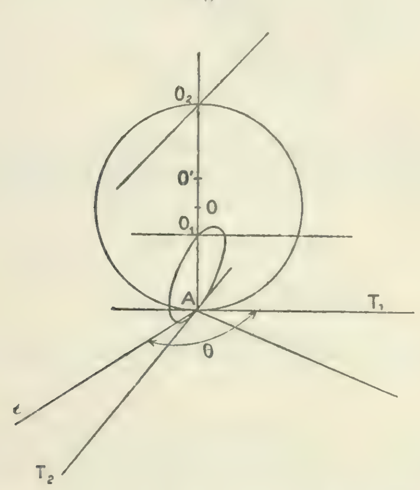
Réciproquement, *soient* X, Y *deux droites rectangulaires,* δ *un point de leur perpendiculaire com-*

mune, Q *un plan passant par* Δ *et faisant l'angle* ω *avec* **X**, *si l'on construit dans ce plan une droite* Z *perpendiculaire à* Δ *et coupant* Δ *en un point* Z_1 *tel que*

$$\delta Z_1 = \delta X_1 \cos^2\omega + \delta Y_1 \sin^2\omega,$$

le lieu de Z *quand* Q *varie est un conoïde de Plücker.* Cela est évident.

Fig. 3.



La propriété que j'ai énoncée est dès lors très facile à démontrer. La surface S étant engendrée par des cercles passant par un point se transforme par inversion relativement à ce point en une surface engendrée par des droites. On reconnaît d'ailleurs de suite que toutes ces droites rencontrent la normale à la surface et sont parallèles au plan tangent en A. Prenons pour puissance d'inversion le produit R_1R_2 des rayons de courbure principaux de la surface au point A, et soient O_1, O_2 les centres de courbure principaux. Les cercles de la surface S, correspondant aux sections princi-

pales T_1AN et T_2AN (*fig.* 3) sont respectivement les cercles de diamètres $AO_1 = R_1$ et $AO_2 = R_2$, situés dans les plans T_2AN et T_1AN. Le cercle AO_1 se transforme en une parallèle à AT_2 menée par O_2, le cercle AO_2 en une parallèle à AT_1 menée par O_1. Si l'on considère maintenant une tangente At faisant l'angle θ avec AT_2, d'après la relation d'Euler, le rayon de courbure $AO = R$ de la section normale correspondante est donné par la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2\theta}{R_1} + \frac{\cos^2\theta}{R_2}.$$

Le cercle correspondant se transforme en une droite passant par O' et menée dans un plan perpendiculaire à At. On aura

$$AO'.AO = R_1 R_2,$$

d'où

$$AO' = R_1 \cos^2\theta + R_2 \sin^2\theta,$$

d'ailleurs l'angle du plan du cercle avec le plan T_1AN est

$$\omega = \theta - \frac{\pi}{2},$$

de sorte que

$$AO' = AO_1 \sin^2\omega + AO_2 \cos^2\omega.$$

Donc, d'après ma définition du conoïde de Plücker, le lieu de la droite figure inverse du cercle de diamètre AO est un conoïde de Plücker, ce qui démontre le théorème énoncé.

Bien entendu, en prenant une autre puissance d'inversion, on obtiendrait un autre conoïde homothétique du précédent, mais le conoïde de Plücker que nous avons obtenu est particulièrement intéressant, nous allons voir pourquoi.

Considérons les tangentes asymptotiques à la sur-

face Σ au point A. Ces droites appartiennent évidemment à la surface S, mais elles se transforment visiblement par inversion en elles-mêmes. Considérons maintenant toutes les surfaces parallèles à Σ : en prenant une puissance d'inversion convenable (le produit $R_1 R_2$ relatif à chaque surface), toutes les surfaces S se transforment en le même conoïde de Plücker, car toutes les surfaces parallèles ont mêmes centres de courbure principaux et mêmes plans de sections principales. Il en résulte le théorème suivant, d'ailleurs déjà connu :

Le lieu des tangentes asymptotiques à une famille de surfaces parallèles, le long d'une normale à ces surfaces, est un conoïde de Plücker.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons d'Algèbre et d'Analyse à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales; par M. *J. Tannery*. — 2 vol. grand in-8° de 423 et 636 pages. Paris, Gauthier-Villars.

I. L'enseignement scientifique de nos Lycées n'est pas seulement une préparation technique; il n'a pas non plus la préoccupation unique d'élever de futurs savants : tout le monde est d'accord là-dessus. Mais quelles qualités cet enseignement doit-il développer dans les jeunes esprits et par quelles méthodes? Dans ses *Leçons d'Algèbre et d'Analyse*, M. Tannery apporte une réponse à ces questions.

Sa méthode est de tout dire. Cela soulève des objections. Celle-ci d'abord : la méthode est dangereuse, elle fera des raisonneurs. Mais ce qui est dangereux ce n'est pas de raisonner, c'est de raisonner mal et il est dangereux aussi que,

dans un pays libre, trop de personnes aient des préventions contre l'usage de la raison. Autre objection, d'un caractère plus pratique : on n'aura pas le temps de donner, dans les Cours, toutes ces explications et d'ailleurs il vaut mieux, dans une Leçon orale, faire bien comprendre l'idée essentielle que passer en revue toutes les difficultés. Mais le maître a dû réfléchir à plus de choses qu'il n'en peut enseigner et puis, à côté du Cours, il y a les Conférences et surtout il y a les Livres auxquels on pourra, de plus en plus maintenant, renvoyer les meilleurs élèves.

Voilà, il me semble, le grand service que va rendre le nouveau Livre de M. Tannery : il engagera les jeunes professeurs à réfléchir sur leur enseignement ; il aidera les bons élèves à compléter ce qu'ils viennent d'apprendre, à goûter la joie de voir clair et d'être sûrs, à acquérir, par de longs et consciencieux efforts, une raison plus ferme et une intelligence plus vigoureuse. Ce n'est pas, du reste, un Livre de pure théorie. Les règles y sont préparées et énoncées de façon à prévenir toute confusion dans les applications et à conduire jusqu'aux calculs numériques ; des discussions minutieuses, des exemples traités avec détails montrent comment on peut, dans la pratique, obtenir une approximation donnée ou compter les décimales exactes.

Il serait trop long de signaler tout ce que l'auteur a apporté de personnel dans un Cours qu'il a évidemment *repensé* tout entier. J'essaierai seulement d'indiquer dans quelles limites il me paraît avoir voulu se maintenir et quelle part il a faite à la pratique et, pour cela, je considérerai d'abord les questions d'Analyse, en prenant mes exemples dans les Chapitres consacrés aux nombres irrationnels, aux séries et aux intégrales définies.

II. La définition d'un nombre irrationnel est rattachée à la notion de *coupure*. Il n'y a pas de difficulté à donner cette notion, en se servant d'exemples simples, ni à introduire les valeurs approchées, avec une approximation donnée, d'un nombre défini à l'aide d'une coupure. Ce qui demande plus d'efforts aux élèves, c'est de comprendre le sens des calculs faits sur les symboles représentant des nombres irrationnels, calculs abrégés qui se rapportent, en définitive, à des valeurs approchées de ces nombres et qui rejettent à la fin les discus-

sions relatives à l'approximation. L'exposé systématique des définitions et des opérations sur les nombres irrationnels est fait avec rigueur, mais avec l'aide de tout ce qui peut soulager l'attention : représentation par un point sur une droite, représentation décimale.... Le calcul des radicaux, l'introduction des exposants fractionnaires ou irrationnels, les définitions des arcs et des aires montrent déjà l'utilité des conceptions qui viennent d'être expliquées. Cette utilité apparaîtra plus clairement quand on abordera l'étude des séries et des fonctions d'une variable réelle.

Dans le Chapitre sur les séries, l'auteur s'est visiblement attaché à employer les démonstrations les plus élémentaires; ainsi la condition de convergence de Cauchy est indiquée seulement dans un passage imprimé en petits caractères. Mais on donne une démonstration rigoureuse de ce fait qu'une quantité qui va constamment en croissant et reste inférieure à une quantité fixe tend vers une limite. Cette démonstration n'est pas autre chose, au fond, qu'une analyse de ce qui est admis dans le raisonnement géométrique exposé ordinairement à ce sujet; on le verrait encore mieux si l'auteur ne s'était pas interdit de parler de la limite supérieure d'un ensemble. La fin du Chapitre sur les séries est consacrée au problème : *Calculer, avec une approximation donnée, la somme d'une série dont on sait calculer chaque terme avec telle approximation que l'on veut:* l'application est faite en détail à deux exemples numériques.

On lira avec un vif intérêt tout le Chapitre sur les séries de fonctions. Le rayon de convergence d'une série entière en x est déterminé, dans le cas simple où tout est positif, par un raisonnement qui revient à considérer la limite supérieure des valeurs de x qui rendent la série convergente. La continuité d'une série entière est rattachée à la même question pour une série de fonctions continues de x dont les termes sont inférieurs, en valeur absolue, aux termes, tous positifs et fixes, d'une série convergente. Ceci permet de trouver la dérivée d'une fonction $f(x)$ définie par une série entière en cherchant directement la limite du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, où l'on fait tendre h vers zéro. L'analogie des propriétés entières avec celles des polynomes entiers est ainsi bien mise en évidence. Les développements des fonctions e^x, $(1+x)^m$, $\log(1+x)$

sont obtenus directement. On explique, en grand détail, l'emploi des développements limités avec un terme complémentaire et l'on en fait l'application aux fonctions rationnelles et aux fonctions implicites.

A propos de l'intégrale définie, je montrerai seulement comment M. Tannery considère l'aire d'une courbe fermée. La notion d'aire a été introduite, dès le premier Chapitre, à propos du cercle, en considérant un polygone (p) limité par une ligne fermée dont tous les points sont intérieurs au cercle ou sur la circonférence, puis un polygone (p') limité par une ligne fermée ayant tous ses points extérieurs au cercle ou situés sur sa circonférence; l'aire p du premier est plus petite que l'aire p' du second; d'autre part, on voit aisément que, parmi les polygones intérieurs à la courbe et les polygones extérieurs, il y en a dont les aires diffèrent aussi peu qu'on veut. L'aire du cercle peut être définie comme un nombre plus grand que l'aire de n'importe quel polygone (p), plus petit que l'aire de n'importe quel polygone (p'). Pour étendre cette définition au cas d'une courbe fermée quelconque, on considère l'aire limitée par une courbe

$$y = f(x),$$

l'axe des x et les ordonnées correspondant aux abscisses a et b $(a < b)$ en supposant d'abord que la fonction $f(x)$ soit positive et croissante; on prend pour polygone (p) la somme des rectangles intérieurs et pour polygone (p') la somme des rectangles extérieurs qui correspondent à une division de l'intervalle (ab) en intervalles partiels; la différence $p' - p$ des aires de ces polygones tend vers zéro quand tous les intervalles partiels tendent vers zéro. On peut alors répéter les raisonnements faits à propos du cercle et regarder comme définie l'aire du trapèze curviligne considéré : p est une valeur approchée par défaut, p' une valeur approchée par excès de cette aire.

Le paragraphe consacré à l'évaluation approchée d'une intégrale définie contient une discussion intéressante de la méthode de Simpson et conduit de la façon la plus naturelle à des formules qui pourraient être rattachées à la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin. La méthode de Simpson convenablement appliquée à l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ donne pour

l'intégrale la valeur 0,7853983 dont la différence avec la valeur exacte est moindre que 2×10^{-7}. On considère encore l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, on évalue une limite de l'erreur commise en la remplaçant par $\int_0^3 e^{-x^2}dx$ et l'on calcule cette dernière intégrale avec quatre décimales exactes.

Je m'en tiendrai à ces exemples pris dans les questions les plus abstraites du programme d'Analyse; on verra que les calculs d'intégrales, les applications aux arcs, aux volumes, aux moments d'inertie, les équations différentielles linéaires ont été traités avec grand soin, le point de vue restant celui du nouveau programme de Mathématiques spéciales.

III. La partie algébrique de ces *Leçons* apporte des éclaircissements et des précisions sur bien des points au sujet desquels il serait certainement plus facile et plus rapide de s'en tenir aux généralités. Par exemple tout ce qui se rapporte aux fonctions symétriques, aux racines infinies des équations algébriques, aux solutions communes à deux équations algébriques renouvelle l'enseignement de ces questions importantes.

A propos des fonctions symétriques, l'auteur insiste sur la distinction à faire entre les fonctions symétriques de n variables et les fonctions symétriques des n racines d'une équation algébrique ($x_1^2 - x_2x_3$ est une fonction symétrique des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$).

Je ferai, en passant, une remarque que je tiens d'ailleurs de M. Tannery sur la question suivante : *Montrer que le calcul d'une fonction rationnelle et symétrique*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

des racines d'une équation algébrique de degré n se ramène au calcul d'un ou de deux polynomes entiers et symétriques de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La proposition s'établit pour une fonction entière en prenant la moyenne

$$\frac{1}{\nu}(F_1 + F_2 + \ldots + F_\nu)$$

des valeurs que prend la fonction quand on effectue sur x_1,

$x_2, \ldots, x_\nu$ les $\nu = 1.2\ldots n$ permutations possibles. L'extension à une fonction rationnelle $\frac{g}{h}$ est immédiate si l'on considère le rapport

$$\frac{g_1 + g_2 + \ldots + g_\nu}{h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu}$$

et si l'on écarte le cas singulier où l'on aurait

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_\nu = 0.$$

Pour éviter d'avoir à faire cette restriction, il suffit d'opérer comme on l'a fait pour les fonctions entières et de considérer la somme

$$\frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2} + \ldots + \frac{g_\nu}{h_\nu} = \frac{g_1 h_2 \ldots h_\nu + g_2 h_1 \ldots h_\nu + \ldots}{h_1 h_2 \ldots h_\nu};$$

cette somme étant mise sous forme de fraction, son dénominateur et par suite son numérateur sont des fonctions symétriques des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Quand on veut calculer une fonction symétrique entière $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à l'aide des fonctions symétriques élémentaires $s_1, s_2, \ldots, s_n$, on peut passer par l'intermédiaire des sommes de puissances semblables. Mais cette méthode n'est pas toujours la plus commode. On expose ici la méthode de Waring qui, outre ses avantages pratiques, met en évidence des propriétés du polynome $F(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ auquel se ramène la fonction donnée $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et l'on montre sur des exemples comment on peut profiter de simplifications qui résultent des valeurs numériques des coefficients.

L'examen des cas particuliers et de la façon dont il faut entendre le théorème : *Deux équations des degrés respectifs n, p ont np solutions* est, dit l'auteur, en dehors du cadre de ces *Leçons*. Mais, dans les passages imprimés en petits caractères, il donne à ce sujet des indications très instructives. Les degrés de deux polynomes entiers en x dont les coefficients sont des fonctions entières de y peuvent s'abaisser tous les deux pour une valeur particulière de y; on dira que ces deux polynomes ont un diviseur commun de degré *rectifié* $\gamma + r$ si γ est le plus petit des deux nombres qui marquent l'abaissement du degré et si, en outre, les

deux polynomes ont un diviseur de degré *vrai* égal à r. Ceci permet de présenter avec précision ce qui se rapporte aux points à l'infini communs à deux courbes algébriques. Quant à définir une solution multiple de deux équations

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0,$$

on montre qu'on y peut parvenir par une méthode qui revient à former l'équation tangentielle des points communs aux deux courbes correspondantes.

Je voudrais parler encore des 400 Exercices proposés à la fin des Chapitres auxquels ils se rapportent. Mais il faut terminer une Note déjà bien longue. C'est en lisant avec soin les deux Volumes de cet Ouvrage qu'on reconnaîtra tous les services qu'il peut rendre aux élèves et à l'Enseignement.

E. Lacour.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2023.

(1905, p. 48.)

C_m^r désignant le nombre des combinaisons de m objets r à r, démontrer l'inégalité

$$(C_m^{r+3} C_m^r - C_m^{r+1} C_m^{r+2})^2$$
$$< 4[(C_m^{r+1})^2 - C_m^r C_m^{r+3}][(C_m^{r+2})^2 - C_m^{r+1} C_m^{r+3}],$$

m et r étant quelconques ($r \leqq m$).

(Solon Chassiotis.)

SOLUTION

Par l'Auteur.

L'équation

$$(x - 1)^m = 0$$

a toutes ses racines réelles et, d'après un théorème de Catalan, entre quatre coefficients consécutifs a, b, c, d, on a l'inégalité

$$(1) \qquad (ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) < 0.$$

En remplaçant a, b, c, d par

$$(-1)^p C_m^p, \quad (-1)^{p+1} C_m^{p+1}, \quad (-1)^{p+2} C_m^{p+2}, \quad (-1)^{p+3} C_m^{p+3},$$

on a l'inégalité proposée, en remplaçant les puissances paires de (-1) par -1.

QUESTIONS.

2040. Attachant aux mots de *semi-plan* et de *semi-sphère* les sens que leur a donnés Laguerre, démontrer les théorèmes suivants :

1° Les cinq semi-sphères qui touchent cinq semi-plans quelconques, pris quatre à quatre, touchent une même semi-sphère.

2° Étant données cinq sphères qui touchent une même semi-sphère (S), il existe, outre (S), une semi-sphère qui touche quatre quelconques d'entre elles. Les cinq semi-sphères ainsi obtenues touchent une même semi-sphère. (R. B.)

2041. Démontrer l'identité suivante, relative au triangle arithmétique :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 6 & 10 & \dots & . \\ 4 & 10 & 20 & \dots & . \\ . & .. & .. & \dots & . \\ n & .. & .. & \dots & . \end{vmatrix} = n.$$

(G. Fontené.)

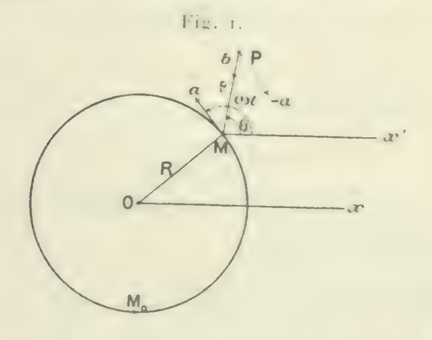
[H1h.R1a]

SUR LES COURBES DE POURSUITE D'UN CERCLE;

Par M. L. DUNOYER.

1. Je me propose d'étudier le mouvement relatif de deux points dont l'un décrit un cercle d'un mouvement uniforme et dont l'autre est animé d'une vitesse constamment dirigée vers le premier point et de grandeur constante. Ce problème correspond au cas où un navire, dont l'appareil à gouverner serait immobilisé sous un

Fig. 1.



angle de barre fixe, serait poursuivi par un autre qui chercherait à l'aborder ou à l'éperonner en mettant constamment le cap sur son adversaire. Nous supposerons d'abord que les navires sont des points et nous verrons ensuite dans quelle mesure les dimensions des deux navires modifient les résultats.

Le mouvement relatif des deux points dépend d'une équation différentielle du premier ordre dont il s'agira d'étudier les intégrales dans le domaine réel. Formons d'abord cette équation.

Le point M (*fig.* 1) décrit le cercle O d'un mouvement uniforme ; sa vitesse angulaire est

$$\omega = \frac{a}{R}.$$

Le point P a une vitesse toujours dirigée vers M ; elle est constante en grandeur et égale à b.

Nous supposons que M et P partent de positions initiales données et que l'axe Ox soit parallèle à la tangente au cercle au point M_0. Par rapport à l'axe polaire de direction fixe Mx, le mouvement relatif de M et de P est défini par les équations :

$$MP = \rho, \qquad \widehat{x\,MP} = \theta.$$

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -b - a\cos(\omega t - \theta), \\ \rho\frac{d\theta}{dt} &= -a\sin(\omega t - \theta). \end{aligned} \right.$$

Posons

$$\omega t - \theta = u$$

et éliminons ρ entre ces deux équations ; nous obtenons l'équation différentielle

$$a\sin u\frac{d^2u}{dt^2} - (b + 2a\cos u)\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$
$$+ (2b + 3a\cos u)\,\omega\frac{du}{dt} - (b + a\cos u)\,\omega^2 = 0.$$

Comme t ne figure pas explicitement dans cette équation, nous la ramènerons au premier ordre en posant

$$\frac{du}{dt} = y, \qquad \cos u = x, \qquad \frac{b}{a} = c,$$

ce qui donne

$$-y(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - (c + 2x)y^2$$
$$+ (2c - 3x)\,\omega y - (c + x)\,\omega^2 = 0$$

ou

$$(2) \qquad \frac{dx}{y(x^2-1)} = \frac{dy}{[\text{illegible}]}.$$

2. Cette équation est de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

X et Y étant deux polynomes en x et y du troisième degré. Par chaque point du plan des xy passe une intégrale holomorphe et une seule. Il ne peut y avoir exception que pour les points de rencontre des deux courbes

$$X = 0, \qquad Y = 0;$$

ces points ont pour coordonnées :

$$V \begin{cases} x = 1, \\ y = \omega, \end{cases} \qquad C \begin{cases} x = 1, \\ y = \omega \dfrac{c-1}{c-2}, \end{cases}$$

$$V' \begin{cases} x = -1, \\ y = \omega, \end{cases} \qquad C' \begin{cases} x = -1, \\ y = \omega \dfrac{c-1}{c-2}; \end{cases}$$

$$A \begin{cases} x = -c, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{matrix} \gamma \\ \gamma' \end{matrix} \begin{cases} x = \pm\infty, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma'_1 \end{matrix} \begin{cases} x = 0, \\ y = \pm\infty. \end{cases}$$

Pour n'avoir pas de branches infinies nous projetterons le plan des xy sur une sphère tangente à ce plan au point $x = 0$, $y = 0$, le centre de la sphère étant le centre de projection.

Pour étudier la forme des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier, il suffit de transporter l'origine des coordonnées en ce point et d'appliquer le théorème suivant [1] :

---

[1] *Cf.* Picard, *Traité d'Analyse*, t. III.

Soient

$$X = ax + by + \ldots,$$
$$Y = a'x + b'y + \ldots,$$

λ_1 et λ_2 les deux racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ a' & b' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Si λ_1 et λ_2 sont réels :

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$: *le point est un nœud.*

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$: *le point est un col.*

Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires :

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ imaginaire : *le point est un foyer.*

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$: *le point est généralement un foyer, quelquefois un centre.*

Le cas où le point singulier considéré serait un centre est un cas très particulier, dans lequel une certaine infinité de coefficients qu'il faudrait calculer pour trouver une série convergente $F(x, y)$ ordonnée suivant les puissances croissantes de x et de y satisfaisant à l'équation

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

seraient tous nuls. Nous verrons d'ailleurs que, dans le cas actuel, cette circonstance ne peut se présenter.

L'application de ce théorème ne présente aucune difficulté pour les points A, C, A', C' et A : elle fournit les résultats suivants :

Pour A.......	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$		nœud
» C.......	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -2\,\frac{c-1}{c-2}$		col
» A'.......	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$		nœud
» C'.......	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -2\,\frac{c-1}{c-2}$	$0 \leq c \leq 1$	col
		$1 \leq c \leq 2$	nœud
		$2 \leq c$	col

Pour le point A, λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 - c\omega\lambda - \omega^2(c^2 - 1) = 0;$$

donc

$$c < \frac{2}{\sqrt{5}}: \qquad \text{foyer.}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} < c < 1, \qquad \text{nœud.}$$

$$1 < c: \qquad \text{col.}$$

Comme $c\omega$ est toujours différent de zéro, on ne peut jamais avoir de centre.

Pour les points ν, ν', γ et γ', l'application du théorème invoqué ne peut pas être immédiate, car chacun de ces points est un point double pour l'une ou l'autre des courbes $X = 0$, $Y = 0$. Pour ramener ce cas au précédent, il suffit de déformer légèrement une des branches de la courbe qui admet le point étudié comme point double et de voir ce qui se passe à la limite.

Pour étudier les points γ et γ', nous remplacerons donc l'hyperbole

$$2xy - \omega x + cy - c\omega = 0$$

par l'hyperbole

$$2(x + \alpha y)y - \omega x + cy - c\omega = 0,$$

α étant une quantité très petite que nous ferons tendre

vers zéro. Cette hyperbole coupe le grand cercle $x = 1$ au point

$$x = 1, \qquad y = \frac{-(c-2) - \sqrt{(c-2)^2 + 8\omega(c-1)\alpha}}{4\alpha},$$

qui tend vers l'équateur quand α tend vers zéro. Portons l'origine en ce point

$$x' = x - 1,$$

$$y' = y - \frac{c - 2 + \sqrt{(c-2)^2 + 8\omega(c-1)\alpha}}{4\alpha};$$

l'équation devient

$$\frac{dx'}{-\frac{c-2+\sqrt{(c-2)^2 + 8\omega(c-1)\alpha}}{2\alpha}x' - \ldots}$$

$$= \frac{dy'}{\sqrt{\alpha x' - \Big[- \frac{c-2-\sqrt{\;}}{2\alpha} \ldots \frac{(c-2+\sqrt{\;})}{8\alpha} \ldots - \omega - c\,\frac{c-2+\sqrt{\;}}{4\alpha} \ldots - c\omega - \big(\frac{c-2+\sqrt{\;}}{4\alpha} \ldots \omega\big)\big[2 - (c-2+\sqrt{\;}) - c\big]\Big] y' - \ldots}}$$

[illegible]

Les termes en dehors des radicaux sont du second degré au moins ; il est inutile de calculer le coefficient de x' ; les deux racines de l'équation en λ sont, en effet,

$$\lambda_1 = -\frac{c-2-\sqrt{(c-2)^2+8\omega(c-1)\alpha}}{2\alpha},$$

$$\lambda_2 = \frac{3\left[c-2+\sqrt{(c-2)^2+8\omega(c-1)\alpha}\right]^2}{8\alpha}$$
$$- \frac{c-2+\sqrt{\;}}{2\alpha}(c-2-2\omega\alpha) - \omega(2c-3).$$

Mettons le radical sous la forme

$$(c-2)\sqrt{1 + 8\omega\frac{c-1}{(c-2)^2}\alpha} = c - 2 + 4\omega\frac{c-1}{c-2}\alpha + \ldots.$$

Nous obtenons pour λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 = -\frac{c-2}{\alpha} + A + B\alpha + \ldots$$

$$\lambda_2 = \frac{(c-2)^2}{\alpha} + A' + B'\alpha + \ldots.$$

Pour les valeurs très petites de α, le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est très voisin de

$$-\frac{1}{c-2},$$

ce qui correspond à un col.

Il faut voir maintenant quelle est la nature du point de rencontre, voisin de l'équateur pour les petites valeurs de α, de l'hyperbole

$$2(x-\alpha y)y - \omega x - cy - c\omega = 0$$

avec le grand cercle $x = -1$. Ce point a pour coordonnées

$$x = -1,$$

$$y = \frac{-(c-2) - \sqrt{(c-2)^2 - 8\omega(c-1)\alpha}}{4\alpha}.$$

Un calcul tout à fait semblable au précédent fournit les valeurs suivantes de λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 = \frac{c-2}{\alpha} + A_1 + B_1\alpha + \ldots,$$

$$\lambda_2 = \frac{(c-2)^2}{\alpha} + A_1 + B_1\alpha + \ldots.$$

ce qui correspond

si $c < 2$ à un col ;
si $c > 2$ à un nœud.

Il résulte de là que

si $c < 2$ { les points γ_1 et γ_2 sont la superposition de deux cols ;

et

$$\text{si} \quad c > 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ces points sont la superposition d'un} \\ \qquad\qquad \text{col et d'un nœud.} \end{array} \right.$$

Dans le premier cas, les seules intégrales passant par les points γ et γ' sont l'équateur (limite commune de deux des intégrales passant par les cols composants) et les deux grands cercles $x = -1$, $x = +1$.

Dans le second, il passe par les points γ et γ' une infinité d'intégrales (¹).

En ce qui concerne les points ν et ν', nous pouvons remarquer que leur étude n'est pas nécessaire au problème posé, car le champ qui intéresse ce problème est celui qui est compris entre les grands cercles $x = \pm 1$. Toutefois, la même méthode que ci-dessus montre que les points ν et ν' sont toujours des nœuds.

3. Examinons maintenant comment les caractéristiques ou courbes intégrales aboutissent aux nœuds.

En portant l'origine au nœud N, par exemple, l'équation devient

$$\frac{dx'}{2x' + \dots} = \frac{dy'}{y' + \dots} = \frac{dv}{v} \qquad \left(\begin{array}{l} x = x' + 1 \\ y = y' + 0 \end{array} \right).$$

On sait qu'il existe des développements de x' et de y' suivant les puissances croissantes de cv^2 et de $c_1 v$ respectivement, convergents dans un certain intervalle : soient

$$x' = cv^2 + \dots,$$
$$y' = c_1 v + \dots$$

(¹) La méthode qui vient d'être employée est évidemment générale. En fait, pour les points γ et γ', on arrive plus rapidement au résultat en faisant la transformation $x = x' \pm 1$, $y = \frac{1}{z}$; ce procédé direct réussit ici parce qu'on peut séparer les deux branches de la courbe $X = 0$ qui passent par le point étudié.

ces développements. Il en résulte que toutes les caractéristiques sont tangentes au grand cercle $x = -1$, qui est lui-même une caractéristique. Une seule fait exception, c'est le grand cercle

$$y' = 0,$$

ou

$$y = \omega.$$

Il en est de même pour les caractéristiques qui aboutissent au nœud N sur le grand cercle $x = 1$.

Quand c est compris entre 1 et 2, le point c' est un nœud. Posons

$$x = x' - 1,$$

$$y = y' + \omega \frac{c-1}{c-2};$$

l'équation devient

$$\frac{dx'}{-2\omega \dfrac{c-1}{c-2} x' + \ldots} = \frac{dy'}{\dfrac{c\omega^2}{(c-2)^2} x' - \omega y' + \ldots}$$

et l'on a

$$\lambda_1 = -2\omega \frac{c-1}{c-2}, \qquad \lambda_2 = -\omega, \qquad a' = \frac{c\omega^2}{(c-2)^2}.$$

Pour ramener l'équation à la forme

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1 + \ldots} = \frac{dy_1}{\lambda_2 y_1 + \ldots},$$

posons

$$x_1 = \alpha x' + \beta y',$$

$$y_1 = \alpha' x' + \beta' y'.$$

Si F est une série convergente satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$X \frac{dF}{dx'} + Y \frac{dF}{dy'} = 0,$$

on doit avoir

$$(\lambda_1 x + \ldots)\left(\frac{dF}{dx_1}\alpha + \frac{dF}{dy_1}\alpha'\right)$$

$$+ (a'x + \lambda_2 y + \ldots)\left(\frac{dF}{dx_1}\beta + \frac{dF}{dy_1}\beta'\right)$$

$$= (\lambda_1 x_1 + \ldots)\frac{dF}{dx_1} + (\lambda_2 y_1 + \ldots)\frac{dF}{dy_1},$$

ce qui donne

$$\lambda_1 \alpha x + (a'x + \lambda_2 y)\beta = \lambda_1(\alpha x + \beta y),$$

$$\lambda_1 \alpha' x + (a'x + \lambda_2 y)\beta' = \lambda_2(\alpha' x + \beta' y);$$

d'où

$$\beta = 0, \qquad (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha' = a'\beta',$$

et, si l'on veut,

$$\alpha = 1, \qquad \beta' = 1;$$

de sorte que l'on a

$$x_1 = x,$$

$$y_1 = \frac{a'}{\lambda_2 - \lambda_1} x + y,$$

et l'équation devient

$$dx_1\left(a'x_1 - \lambda_2 \frac{a'}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1 + \lambda_2 y_1 + \ldots\right)$$

$$= \left(dy_1 - \frac{a'}{\lambda_2 - \lambda_1} dx_1\right)(\lambda_1 x_1 + \ldots)$$

ou

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1 + \ldots} = \frac{dy_1}{\lambda_2 y_1 + \ldots} = \frac{dv}{v}.$$

On a donc pour x_1 et y_1 des développements convergents de la forme

$$x_1 = h v^{\lambda_1} + \ldots,$$

$$y_1 = k v^{\lambda_2} + \ldots;$$

d'où

$$y' = k'e^{\omega v} + \ldots - \frac{c\omega}{(c-2)(3c-4)}\left(ke^{-2\omega\frac{c-1}{c-2}v} + \ldots\right),$$

$$x' = ke^{-2\omega\frac{c-1}{c-2}v} + \ldots.$$

Si donc

$$\omega > -2\omega\frac{c-1}{c-2} \quad \text{ou} \quad c < \frac{4}{3},$$

la tangente à une caractéristique, au nœud c', d'ailleurs variable avec les constantes k et k', sera distincte du grand cercle $x = -1$.

Si, au contraire,

$$\frac{4}{3} < c < 2,$$

la tangente à toutes les caractéristiques sera le grand cercle $x = -1$.

Quand $c = \frac{4}{3}$, on a $\lambda_1 = \lambda_2$; on sait alors que les intégrales du système

$$\frac{dx'}{x' + \ldots} = \frac{dy'}{\frac{c\omega}{(c-2)^2}x' - y' + \ldots} = \frac{dv}{v}$$

se présentent sous forme de développements ordonnés suivant les puissances croissantes de v et de $v \log v$: $\frac{y'}{x'}$ tend donc vers $\pm\infty$ quand v tend vers 0.

Dans le cas où c est plus grand que 2, les points γ et γ' sont des nœuds. Il nous sera encore nécessaire de connaître les développements représentant les intégrales dans le voisinage de ces nœuds.

En posant $y = \frac{1}{z}$, l'équation devient

$$\frac{dx}{(x^2-1)} = \frac{-dz}{z(1-\omega z)(-\omega xz - 2x - c\omega z - c)}.$$

Par le point $x = \alpha$, $(\alpha^2 = 1)$, $z = 0$ passe donc une intégrale représentée par le développement

$$z = A(x - \alpha)^2 + \dots ;$$

d'où

$$y = \frac{1}{A(x - \alpha)^2 + \dots},$$

les termes non écrits étant des puissances supérieures de $x - \alpha$.

Si $\alpha = -1$, en faisant la substitution $x = x' - 1$, l'équation devient

$$\frac{dx'}{-x'(x' - 2)} = \frac{dz}{(c - 2)z + \dots}.$$

Le point $x' = 0$, $z = 0$ est donc un nœud ; au contraire, le point $x = 1$, $z = 0$ qui fournirait l'équation

$$\frac{dx'}{-x'(x' + 2)} = \frac{dz}{(c + 2)z + \dots}.$$

est un col par où passent les grands cercles $z = 0$ et $x = 1$ (1).

Dans le voisinage du nœud on peut développer les intégrales sous la forme

$$x' = ku^2 \quad + \dots,$$
$$z = k'u^{c-2} + \dots,$$

ou

$$y = \frac{1}{k'u^{c-2} + \dots}.$$

Reste enfin l'étude des intégrales au voisinage du point A ($x = -c$, $y = 0$) quand ce point est un nœud $\left(1 > c > \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

En transportant l'origine en ce point, l'équation

---

(1) Voir plus haut.

devient

$$\frac{dx}{(c^2-1)y+\ldots} = \frac{dy}{\omega^2 x + c\omega y + \ldots} \qquad (x = r - c \ldots).$$

Pour ramener l'équation à la forme

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1 + \ldots} = \frac{dy_1}{\lambda_2 y_1 + \ldots} \qquad \left(\begin{array}{l} \lambda_1 = \omega \dfrac{c + \sqrt{5c^2 - 4}}{2}, \\[2ex] \lambda_2 = \omega \dfrac{c - \sqrt{5c^2 - 4}}{2} \end{array} \right),$$

il suffit d'appliquer la méthode déjà employée. On pose

$$x_1 = \alpha x + \beta y,$$
$$y_1 = \alpha' x + \beta' y,$$

et l'on a, pour déterminer α, β, α', β', les équations

$$\omega^2 \beta = \alpha \lambda_1, \qquad\qquad \omega^2 \beta' = \alpha' \lambda_2,$$
$$(c^2-1)\alpha + c\omega\beta = \lambda_1 \beta, \qquad (c^2-1)\alpha' + c\omega\beta' = \lambda_2 \beta';$$

λ_1 et λ_2 étant les racines de l'équation

$$\lambda^2 - c\omega\lambda - \omega^2(c^2-1) = 0.$$

dans chaque groupe, les secondes équations sont une conséquence des premières. On pourra donc prendre

$$\alpha = \omega^2, \qquad \beta = \lambda_1, \qquad \alpha' = \omega^2, \qquad \beta' = \lambda_2,$$

et l'on a

$$x = \frac{\lambda_1 y_1 - \lambda_2 x_1}{\omega^2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \qquad y = \frac{x_1 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$\frac{(\lambda_1\, dy_1 - \lambda_2\, dx_1)}{\omega^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1 y_1 - \lambda_2 x_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + c\omega \frac{x_1 - x_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \ldots \right)$$
$$= \frac{dx_1 - dy_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left((c^2-1) \frac{x_1 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \ldots \right),$$

ou

$$\frac{dx_1}{[-\lambda_1\lambda_2 + c\omega\lambda_1 + \omega^2(c^2-1)]x_1 + \ldots}$$
$$= \frac{dy_1}{[-\omega^2(c^2-1) + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2 c\omega]y_1 + \ldots}.$$

ou encore

$$\frac{dx_1}{-\sqrt{5c^2-4}-c)x_1+\dots}$$

$$=\frac{dy_1}{+(\sqrt{5c^2-4}-c)y_1+\dots}=\frac{du}{u},$$

d'où l'on conclut que x_1 et y_1 peuvent se développer suivant les puissances de $u^{-\sqrt{5c^2-4}-c}$ et de $u^{\sqrt{5c^2-4}-c}$:

$$x_1 = \mathrm{K}\,u^{-\sqrt{5c^2-4}-c}+\dots,$$

$$y_1 = \mathrm{K}'\,u^{\sqrt{5c^2-4}-c}+\dots,$$

ce qui donne

$$x=\frac{\left\{\begin{array}{l}(c-\sqrt{5c^2-4})(\mathrm{K}'u^{\sqrt{5c^2-4}-c}+\dots)\\ \quad -(c+\sqrt{5c^2-4})(\mathrm{K}\,u^{-\sqrt{5c^2-4}-c}+\dots)\end{array}\right\}}{-2\omega^2\sqrt{5c^2-4}},$$

$$y=\frac{\mathrm{K}\,u^{-\sqrt{5c^2-4}-c}+\dots-\mathrm{K}'\,u^{\sqrt{5c^2-4}-c}+\dots}{-\omega\sqrt{5c^2-4}}.$$

x et y sont donc du même ordre infinitésimal, de sorte que l'on a, dans le voisinage du point F,

$$y=\mathrm{A}(x-c)+\dots \qquad \left(\mathrm{A}=\frac{-2\omega}{c+\sqrt{5c^2-4}}\right).$$

Il resterait enfin à examiner s'il y a autour du point F (nœud ou foyer) un cycle limite. Je n'ai pas encore résolu cette question ; nous verrons dans quelle mesure intervient l'existence ou la non-existence de ce cycle limite.

4. Connaissant les points singuliers du système des caractéristiques, il nous suffirait encore de connaître le système topographique des cycles sans contact pour pouvoir tracer complètement le système des caractéristiques. On sait en effet qu'il existe toujours un tel sys-

tème topographique de cycles et de polycycles sans contact dont les fonds et les sommets sont les nœuds et les foyers du système des caractéristiques, et dont les cols sont les cols de ce système (¹).

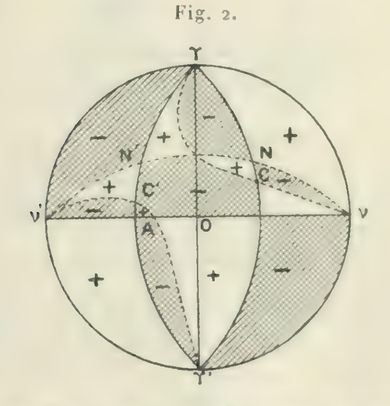
Sans connaître l'équation du système des cycles sans contact, il est possible dans le cas présent de prévoir la forme des caractéristiques en s'appuyant sur la propriété qui vient d'être rappelée et en se servant du tracé des courbes

$$X = 0, \qquad Y = 0.$$

En tout point de la première la tangente à la caractéristique passant par ce point est parallèle à l'axe des y et en tout point de la seconde la tangente est parallèle à l'axe des x, les points singuliers qui sont à la fois sur ces deux courbes étant naturellement exclus.

Ces courbes, qui se composent (*fig.* 2), la première

Fig. 2.



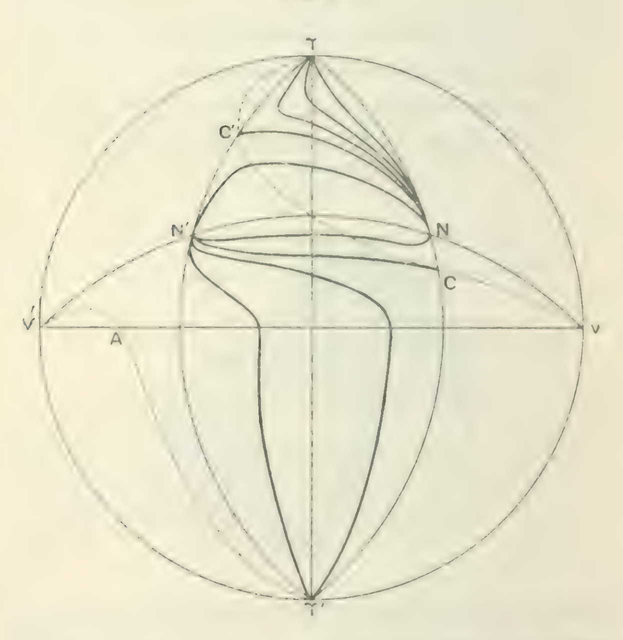
de l'axe des x et des grands cercles $x = \pm 1$ et la seconde du grand cercle $y = \omega$ et de l'hyperbole $2xy - \omega x + cy - c\omega = 0$, partagent la sphère en

(¹) *Cf.* H. Poincaré, *Journal de Liouville*, t. VIII, 1882.

régions dans chacune desquelles $\frac{dy}{dx}$ a toujours le même signe. Dans la figure ci-jointe les régions marquées + sont celles où $\frac{dy}{dx}$ est constamment positive et — celles où $\frac{dy}{dx}$ est négative. Suivant les valeurs de c nous aurons donc, pour le système des caractéristiques, dans le fuseau compris entre les deux cercles $x = \pm 1$, les figures suivantes :

1° $c > 2$ (*fig.* 3).

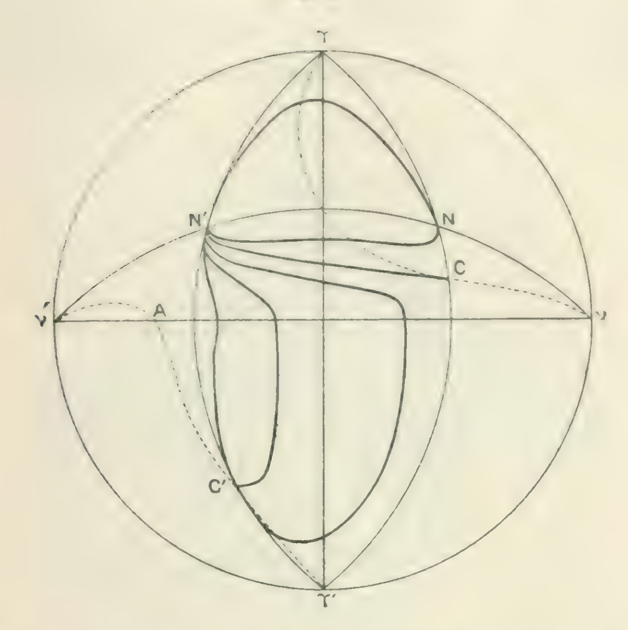

Fig. 3.



2° $2 > c > 1$. — Si $c > \frac{4}{3}$ (*fig.* 4), toutes les caractéristiques sont tangentes au grand cercle $x = 1$ au point C'.

3° $1 > c > \frac{2}{\sqrt{5}}$. — La figure 5 est faite en supposant

Fig. 4.



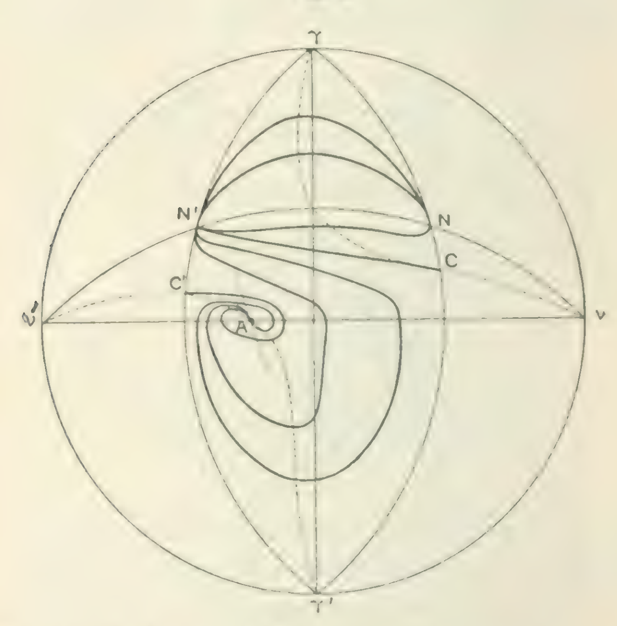
qu'il n'y a pas de cycle limite autour du nœud A. En ce point toutes les caractéristiques sont tangentes à la droite ayant pour coefficient angulaire $-\frac{2\omega}{c+\sqrt{5c^2-4}}$, comprise par conséquent entre la tangente à l'hyperbole, dont le coefficient angulaire est $-\frac{\omega}{c}$ et la droite $x = -c$.

4° $\frac{2}{\sqrt{5}} > c > 0$. — La figure 6 est faite en supposant que le foyer A n'est pas entouré d'un cycle limite.

La figure 7 représente le voisinage du point A quand il y a un cycle limite.

Remarque. — Quand $c < 1$ il ne peut y avoir de caractéristique joignant le nœud N et le col C, ni C et C', tandis qu'il y en a une joignant N' et C. En effet, les ordonnées des points C et C' sont $\omega\frac{c-1}{c-2}$ et $\omega\frac{c+1}{c+2}$; celle du point C' est donc toujours plus petite que celle


Fig. 5.



du point C. Il y aurait donc nécessairement, pour une caractéristique joignant N et C' ou C et C', des points où l'on aurait $\frac{dy}{dx} > 0$ et qui seraient situés dans la région — comprise entre les grands cercles $x = \pm 1$, l'hyperbole $2xy - \omega x + cy - c\omega = 0$ et l'axe des x, ce qui est impossible.

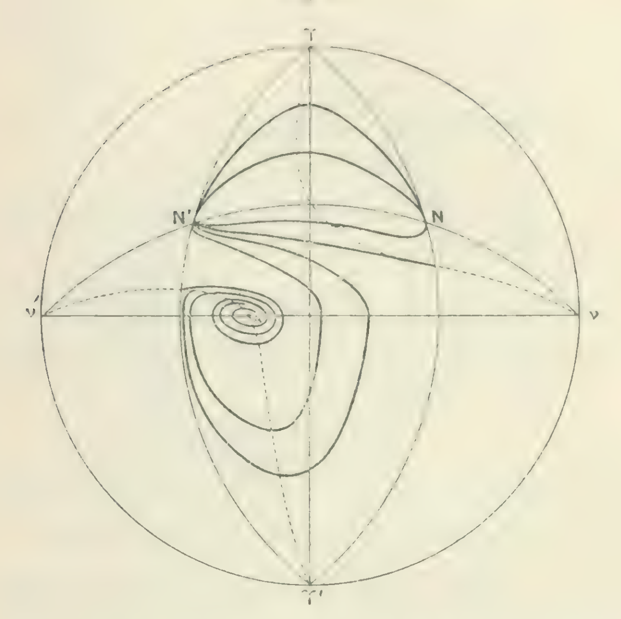
5. Il faut maintenant interpréter ces résultats en se servant des variables ρ et θ.

Nous avons

$$\cos u = x, \qquad u = \omega t + \theta,$$

$$\rho = \frac{a \sin u}{y - \omega}, \qquad dt = \frac{-dx}{\omega \sin u}.$$

Fig. 6.



Soient θ_0 et ρ_0 les valeurs initiales de θ et de ρ ($t = 0$); les valeurs correspondantes de x et de y sont

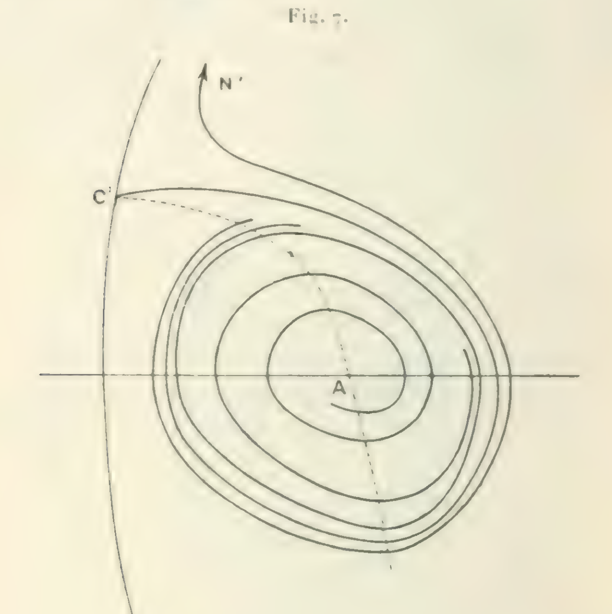
$$x_0 = \cos\theta_0,$$

$$y_0 = \omega - \frac{a \sin\theta_0}{\rho_0}.$$

Il résulte de là que, à l'instant initial, la région du plan située au-dessous de la tangente M_0T (*fig.* 8) ($\pi < \theta_0 < 2\pi$) correspond à la région de la sphère comprise entre les grands cercles $x = \pm 1$ et au-dessus du

grand cercle $y = \omega$. La région située au dessus de la tangente correspond à la région de la sphère située au-dessous de ce grand cercle.

Fig. 7.



Si $y_0 > \omega$, on a

$$z_0 = \frac{a\sqrt{1 - x_0^2}}{y_0 - \omega}.$$

Si $y_0 < \omega$, on a

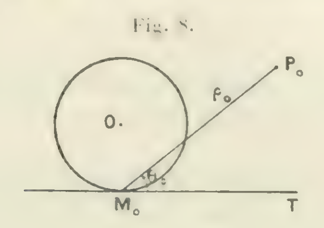
$$z_0 = \frac{-a\sqrt{1 - x_0^2}}{y_0 - \omega}.$$

D'autre part, le sens dans lequel il faut supposer qu'un mobile se déplace sur la caractéristique sphérique, à partir de la position initiale Q_0, est déterminé par ce fait que dt doit être un accroissement positif du

temps. Si donc $y_0 > \omega$, le mouvement se fait de manière que x décroisse.

Si $\omega > y_0 > 0$, le sens du mouvement sur la caractéristique est celui de x croissant.

Fig. 8.



Si $y_0 < 0$, le sens du mouvement est celui de x décroissant.

Partant du point initial $Q_0(x_0, y_0)$ on arrive en un point de la caractéristique $Q(x, y)$ au bout du temps

$$t = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y \sin u},$$

cette intégrale étant prise le long de la caractéristique.

La quantité sous le signe $\int$ ne devient infinie que lorsqu'on rencontre l'axe des x ou l'un des points N ou N', C ou C'. De plus, pour les points γ et γ', qui sont des nœuds quand $c > 2$, le dénominateur peut devenir de la forme $\infty \times 0$. Examinons ces différents cas.

Les caractéristiques étant toutes normales à l'axe des x, celle qui passe par le point $x = \alpha$, $y = 0$, $-1 < \alpha < 1$, $\alpha \neq -c$, a pour développement

$$y = A(x - \alpha)^{\frac{1}{2}} + A_1(x - \alpha)^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

car ce point est un point ordinaire pour l'équation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{X}{Y}$$

et l'on a

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=0}} = 0,$$

ce qui donne

$$x = \alpha + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots.$$

Il résulte de là que, si x tend vers α en suivant un arc de caractéristique, l'intégrale

$$t = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y \sin u}$$

tend vers une valeur finie.

De même, quand le point tend vers un des points N ou N', y tend vers ∞ et $\sin u$ tend vers zéro comme $\sqrt{1-x}$ ou $\sqrt{1+x}$, ce qui fait tendre l'intégrale vers une valeur finie. Il en est de même quand le point mobile tend vers un des points C ou C'.

Quand le point θ tend vers γ ou γ', deux cas sont à distinguer suivant que la caractéristique suivie est asymptote au grand cercle $x = -1$ ou au grand cercle $x = \alpha$ $(-1 < \alpha < 1)$. Dans le premier cas on a, pour les valeurs très grandes de $|y|$,

$$t = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\left(\frac{1}{K_1(x+1)^{\frac{e-2}{2}}} + \ldots\right)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Comme $e > 2$, on a

$$\frac{3-e}{2} < 1,$$

et par conséquent l'intégrale tend vers une limite finie.

Dans le second cas on a

$$t = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\left(\frac{A}{(x-\alpha)} + \ldots\right)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

et l'intégrale a encore une limite finie.

Il reste enfin à voir ce que devient cette intégrale quand le point décrit un arc de caractéristique aboutissant au nœud A $\left(1 > c > \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. On a, comme nous l'avons vu,

$$y = \Lambda(x - c) + \ldots \qquad \left(\Lambda = \frac{-2\omega}{c - \sqrt{5c^2 - 4}}\right).$$

Il en résulte que, quand x tend vers $-c$, l'intégrale qui représente le temps devient infinie comme un logarithme. Dans toute la région étudiée de la sphère c'est le seul point où cette intégrale soit infinie.

Quant à la valeur de ρ, elle est finie en tout point du champ des caractéristiques, nulle aux cols C et C', indéterminée aux nœuds N et N'. Si l'on aboutit à l'un de ces nœuds en suivant la caractéristique

$$x \mp 1 = c v^2 + \ldots,$$
$$y - \omega = c_1 v + \ldots,$$

ρ tend vers la limite

$$\rho = \pm \frac{a\sqrt{2}\sqrt{\mp c}}{c_1}.$$

On repartira du nœud sur la caractéristique située de l'autre côté du grand cercle $y = \omega$ en donnant à ρ la même valeur $\left(\text{même valeur du rapport } \frac{\sqrt{\mp c}}{c_1}\right)$ et l'on pourra arriver au bout d'un certain temps à l'autre nœud. Je dis que ce sera avec une valeur de ρ nécessairement plus petite.

En effet, si le point P_0 est très éloigné du point M_0, le point Q_0 sera très voisin du grand cercle $y = \omega$. Il est évident que le navire P se rapprochera constamment du centre du cercle décrit par le navire M, tant qu'il

n'aura pas pénétré dans ce cercle. La distance

$$\rho' = \sqrt{\rho^2 + R^2 \pm 2R\rho \sin u} = a\sqrt{\frac{1-x^2}{(y-\omega)^2} + \frac{1}{\omega^2} \pm \frac{2(1-x^2)}{\omega(y-\omega)}}$$

doit donc toujours diminuer. Le signe $+$ correspond au cas où $y - \omega > 0$ et le signe $-$ au cas où $y - \omega < 0$, comme il est facile de s'en assurer. Si partant d'un certain point d'abscisse x on arrive, en suivant une caractéristique joignant N et N' au point d'abscisse $-x$ du même côté du cercle $y - \omega = 0$, il en résulte que la valeur absolue de $y - \omega$ doit être plus grande pour ce second point que pour le premier.

Nous rencontrons donc ce fait assez curieux que *le point Q, partant de N sur une certaine caractéristique, arrive en N' sur un arc de caractéristique tel qu'en revenant en N l'arc de caractéristique suivi ne soit pas le même qu'au départ*. Le second arc de caractéristique suivi de N en N' est situé au-dessus du premier et le second arc suivi de N' en N est situé au-dessous du premier.

Remarquons pour ce qui suivra que l'on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a(x+c)}{y \sin u}.$$

En ce qui concerne θ, on a

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\omega - \frac{du}{dt}\right)\frac{dt}{dx};$$

or

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{y \sin u},$$

donc

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\omega}{y \sin u} + \frac{1}{\sin u} = \frac{y-\omega}{y \sin u} = \frac{a}{\rho y}.$$

Donc θ varie dans le même sens que x au-dessus de

l'axe des x et en sens contraire au-dessous de cet axe.

Il est maintenant facile d'indiquer quelles seront les circonstances qui se présenteront dans le mouvement des deux navires.

Si leur distance initiale est suffisamment grande le point Q sera voisin du grand cercle $\gamma = \omega$. Le temps croissant, il arrivera sûrement que :

1° Si $c > 2$, le point Q décrira à partir du point N un arc situé au-dessus de la caractéristique NC', ou à partir du point N' un arc situé au-dessous de la caractéristique N'C (ou l'un de ces arcs de caractéristiques).

2° Si $c < 2$, le point Q décrira à partir de N' un arc situé au-dessous de la caractéristique N'C (ou cet arc de caractéristique).

On peut donc toujours supposer la distance initiale grande :

1° $c > 2$. — Soit qu'on aboutisse en γ ou en γ', soit qu'on aboutisse aux cols C ou C', ρ tend vers zéro en un temps fini. *Il y a donc rencontre au bout d'un temps fini.*

2° $2 > c > 1$. — On peut aboutir soit en C, soit en C'. Dans les deux cas la conclusion est la même que la précédente.

Ces deux cas correspondent à une trajectoire (dans le mouvement relatif) ayant la forme suivante (*fig.* 9) :

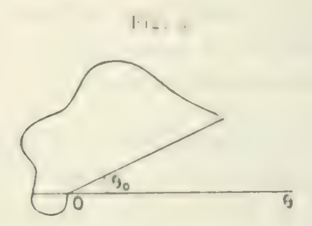
Le nombre des maxima et minima relatifs est fini ; ils correspondent aux passages du point Q en N et N' puisque l'on a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a\,\frac{x-c}{y-\omega}$$

et que $x + c > 0$.

A partir du moment où l'on est sur une caractéristique constamment située au-dessus de NC ou au-dessous de NC, la trajectoire ne présente plus de maxima ou de minima pour ρ.

Fig.



3° $x > c$. — Il nous faut voir tout d'abord à quoi correspondrait l'existence d'un cycle limite, restée hypothétique dans ce cas et dans le suivant :

Les remarques qui ont été faites sur le sens dans lequel le point Q décrit les caractéristiques quand le temps croît constamment, montrent que ce point devrait décrire ce cycle indéfiniment, toujours dans le même sens (sens inverse du sens trigonométrique).

Ce cycle serait tout entier compris entre deux ellipses qui lui seraient tangentes

$$\rho_1^2 = \frac{a^2(1-c^2)}{(1-\omega)^2}, \qquad \rho_2^2 = \frac{a^2(1-c^2)}{(1-\omega)^2}.$$

A ces deux ellipses correspondent deux cercles de rayons ρ_1 et ρ_2, entre lesquels doit rester toujours comprise la trajectoire puisque tous les points intérieurs à la première ellipse, par exemple, correspondent à des valeurs de ρ plus grandes que ρ_1. Ces valeurs sont atteintes pour $x = -c$, d'après la valeur de $\frac{d\rho}{d\theta}$.

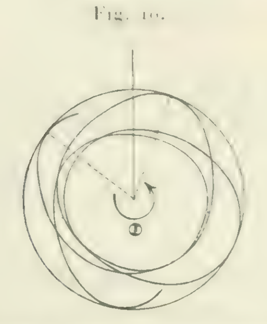
Chaque fois qu'on revient au même point du cycle limite, ρ reprend la même valeur et θ se trouve aug-

menté d'une quantité constante en vertu de la formule

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{a}{\rho y}.$$

La trajectoire de mouvement relatif correspondant au cycle limite est donc une courbe telle que celle-ci (*fig.* 10). Comme l'angle Θ n'est généralement pas

Fig. 10.



commensurable avec π, cette trajectoire n'est pas fermée en général. Elle recouvre tout l'intervalle compris entre les deux cercles.

Les caractéristiques qui s'enroulent sur le cycle limite extérieurement correspondent à des trajectoires qui s'approchent indéfiniment de la trajectoire limite précédente, *en la coupant d'ailleurs une infinité de fois.* Les maxima du rayon vecteur ρ tendent vers ρ_1 par valeurs supérieures et les minima tendent vers ρ_2 par valeurs inférieures.

Au contraire, les caractéristiques qui s'enroulent autour du cycle limite interieurement, correspondent à des trajectoires qui s'approchent indéfiniment de la trajectoire limite, mais telles que les maxima de leurs rayons vecteurs tendent vers ρ_1 par valeurs inférieures et les minima tendent vers ρ_2 par valeurs supérieures.

Quand on suit ces trajectoires dans l'autre sens (le

point Q sur les caractéristiques tend alors vers le point A, foyer ou nœud), elles s'approchent indéfiniment du cercle de rayon

$$\rho = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\omega},$$

qui correspond à l'ellipse

$$\frac{1-e^2}{\omega^2} = \frac{1-r^2}{(1-\omega)^2}$$

passant par le foyer F. Elles coupent d'ailleurs ce cercle une infinité de fois; elles tendent vers ce cercle en festonnant.

Les circonstances suivantes peuvent donc se produire :

Si la caractéristique suivie aboutit au col C, il y a choc au bout d'un temps fini. La trajectoire présente la même forme que lorsque $e > 1$.

Si la caractéristique n'aboutit pas au col C :

Ou bien il n'y a pas de cycle limite et la trajectoire se rapproche *indéfiniment* du cercle de rayon $\frac{a\sqrt{1-e^2}}{\omega}$ en festonnant sur ce cercle; *il n'y a jamais rencontre;*

Ou bien il y a un cycle limite; si, alors, le point Q_0 est en dehors de ce cycle, la trajectoire s'approche *indéfiniment* de la trajectoire limite; si le point Q_0 est à l'intérieur de ce cycle la trajectoire s'éloigne de cette trajectoire limite pour s'approcher indéfiniment du cercle de rayon $\frac{a\sqrt{1-e^2}}{\omega}$. Dans l'un et l'autre cas *il n'y aura jamais rencontre.*

En résumé, en ce qui concerne la rencontre :

1° $e > 1$. — Il y a toujours rencontre au bout d'un temps fini.

2° $c < 1$. — Il y a une infinité simple de chances contre une (infinité)² d'autres pour qu'il y ait rencontre au bout d'un temps fini (caractéristique aboutissant en C). Quand il n'y a pas rencontre la trajectoire relative du point poursuivant s'approche indéfiniment d'une trajectoire limite comprise entre deux cercles ou bien festonne autour d'un cercle compris entre ces deux-là en s'en approchant indéfiniment.

Si maintenant l'on tient compte des dimensions finies des navires on voit que :

Si $c > 2$, il y a toujours rencontre au bout d'un temps fini.

Si $c < 2$, il existe deux bandes de largeur égale à la somme des demi-dimensions des navires et dont les lignes moyennes sont les trajectoires qui correspondent aux caractéristiques passant par le col C ou le col C'. Ces bandes sont telles que, si la position initiale du navire P s'y trouve, il y aura rencontre au bout d'un temps fini. Pour une position initiale de P non comprise dans ces bandes il n'y aura jamais rencontre.

Remarques. — 1° Le cercle de rayon $\frac{a\sqrt{1-c^2}}{\omega}$ a une signification évidente. Supposons que la droite P_0M_0 (*fig.* 11) soit perpendiculaire à OP_0 et que l'on ait

$$OP_0 = Rc;$$

le point P décrira indéfiniment le cercle OP_0. En effet, pendant le temps dt, le point M tourne de l'angle

$$d\alpha = \frac{a\,dt}{R}.$$

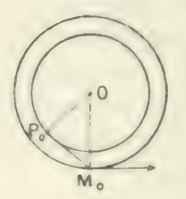
Pendant le même temps le point P_0 tourne de l'angle

$$\frac{b\,dt}{Rc} = \frac{a\,dt}{R}.$$

On a alors

$$P_0M_0 = \sqrt{R^2 - R^2e^2} = R\sqrt{1-e^2} = \frac{a}{\omega}\sqrt{1-e^2}.$$

Fig. 11.



2° Si le point Q_0 est très voisin du point ($e < 1$) la distance initiale des deux navires est très petite. On voit cependant qu'elle ne s'annule jamais et reste toujours supérieure à une valeur fixe différente de zéro.

3° On voit par l'exemple qui vient d'être traité combien les circonstances que peuvent présenter les courbes limites d'un système d'intégrales d'une équation différentielle du second ordre, étudiées dans le domaine réel, sont plus compliquées que celles que présentent les cycles limites des systèmes de caractéristiques relatifs aux équations du premier ordre.

[I19c]

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'ÉQUATION

$$1.2.3.4\ldots z + 1 = y^2;$$

Par M. A. GÉRARDIN.

Le théorème de Wilson, autrement dit l'équation

$$(p-1)! + 1 = M.p \qquad (p \text{ premier}),$$

a donné l'idée de chercher d'autres relations. C'est ainsi que la factorielle N! des nombres naturels, ou

celle P! des nombres premiers, augmentée ou diminuée de l'unité, et devenant parfois un carré ou une somme de divers nombres figurés, s'est présentée fréquemment à l'attention des mathématiciens, qui ont énoncé à leur sujet quelques propositions, pour la plupart empiriques, ou dont la démonstration n'a pas encore abouti, et parmi lesquelles notamment la question proposée, après d'infructueuses recherches, par M. H. Brocard, successivement dans la *Nouvelle Correspondance Mathematique* (nº 166, 1876, p. 287), les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (nº 1532, 1885, p. 391) et *Mathesis* (nº 597, 1887, p. 280) :

L'équation indéterminée en nombres entiers

$$1.2\ldots z + 1 = y^2$$

n'admet pas d'autres solutions que

$$z = 4,\ 5,\ 7; \qquad y = 5,\ 11,\ 71.$$

Cette question est demeurée sans réponse et, en 1897, M. E. Fauquembergue en a sollicité de nouveau la recherche dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (nº 1264, p. 146).

La difficulté de la question réside en la nature de la factorielle

$$N! = 1.2.3.4\ldots n,$$

qui ne peut se représenter par les symboles de l'Algèbre. C'est pourquoi il ne nous paraît possible de l'étudier que par échelons successifs, ce qui multiplie les hypothèses auxiliaires.

De nombreuses recherches dans la *Théorie des nombres* nous ont montré le rôle particulièrement important de la résolution en nombres entiers de l'équation

$$ax^2 + bx + c = y^2.$$

et la corrélation de ce problème avec celui de l'équation

$$N! + 1 = y^2.$$

Le présent travail est destiné à développer cette idée et montrera, à défaut de certitude décisive, que, s'il existe d'autres solutions que $z = 4, 5, 7$, elles doivent être extrêmement grandes.

L'hypothèse fondamentale, reconnue exacte, est que l'équation

$$z! + 1 = y^2$$

n'a pas de solution entre $z = 7$ et $z = 25$. Nous supposerons donc z au moins égal à 25, ce qui donnera

$$z! + 1 = 10^6 h + 1 = y^2.$$

On est ainsi d'abord amené à rechercher une solution de l'équation

$$10^6 h + 1 = y^2.$$

y ne peut être ici que $10x + 1$ ou $10x + 9$.

1° $y = 10x + 1$. — On aura

$$100x^2 + 20x + 1 = 10^6 h + 1,$$

d'où

$$10x^2 + 2x = 10^5 h,$$

$$2x(5x + 1) = 2^5 . 5^5 h$$

Or $5x + 1$ ne sera jamais $m.5$, d'où

$$x = 5^5 a.$$

et alors

$$2.5^5 a(5^6 a + 1) = 2^5 5^5 h$$

ou

$$a(5^6 a + 1) = 2^4 h.$$

ce qui donne

$$a = 16l \quad \text{ou} \quad a = 16l + 7.$$

Donc h ne peut avoir que les deux formes

$$250000f^2 + f \quad \text{ou} \quad 250000f^2 + 218751f + 47852,$$

ce qui donne pour y

$$500000f + 1, \quad 218751.$$

2° $y = 10x + 9$. — Cette hypothèse, développée de la même façon, montrera que y doit être ici de la forme

$$y = 1000000f + 781249,$$

d'où

$$h = 1000000f^2 + 1562498f + 610350,$$

et enfin

$$y = 1000000f + 999999,$$

d'où

$$h = 1000000f^2 + 217998f + 854198.$$

D'autre part, nous savons qu'un carré impair n'est jamais de la forme $6g + 5$; il y aurait donc pour ce problème général *seize* formules.

Mais pour le problème particulier

$$y^2 = 10^6 h + 1 = z^4 + 1,$$

nous n'aurons que les *quatre* formules précédentes où h sera $6m$.

Il reste à exprimer dans la seconde partie des recherches que chacune des formules est séparément divisible par $2^{16}.3^{10}.7^3.11^2.13.17.19.23$, *au moins*. Ceci donnera toutes les conditions particulières, qui, évidemment, ne seront pas toutes compatibles entre elles.

L'étude de ces nouvelles hypothèses est un peu longue et aride : en conséquence, nous ne la développerons pas ici.

La conclusion de nos premières recherches est que,

si la question comporte une autre solution, elle donnera pour y un nombre de 20 à 30 chiffres au moins. Nous serons heureux de voir continuer et développer ces investigations, et espérons les voir aboutir définitivement, après trente années d'attente pour l'auteur de la question.

Il serait peut-être intéressant d'étudier

$$10^8 h + 1 = y^2.$$

Nous avions d'abord essayé d'autres méthodes, mais celle qui vient d'être exposée nous semble préférable (¹).

[K2c]

DÉMONSTRATION DE LA CONSTRUCTION TROUVÉE PAR HAMILTON POUR DÉTERMINER LE POINT OÙ LE CERCLE DES NEUF POINTS D'UN TRIANGLE TOUCHE LE CERCLE INSCRIT (²);

Par M. A. Mannheim.

En 1899, la question 1544 posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* appela l'attention sur la détermination du point de contact du cercle des neuf points d'un triangle et du cercle inscrit à ce triangle. J'envoyai une première réponse, parue la même année

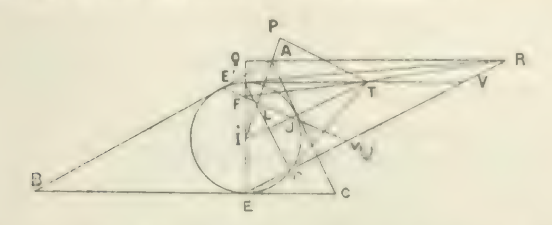
---

(¹) Pour la bibliographie des questions mentionnées, *voir* aussi : *Nouvelle correspondance mathématique* : F. Proth, quest. 301, 1877, p. [illegible]; E. Lucas, 1878, p. 123 (généralisation).

Intermédiaire des Mathématiciens : A. Thorin, quest. 331, 1894, p. 180; E. Fauquembergue, 1899, p. 12[illegible]; H. Tarry, 1895, p. 36[illegible]; 1896, p. 27[illegible]. — E. B. Escott, quest. 1264, 1898, p. 78; quest. 2446, 1903, p. 69; P.-F. Teilhet, 1904, p. 51. — G. de Rocquigny, quest. 2746, 1904, p. 98; quest. 2813, 1904, p. 190; quest. 2822, 1904, p. 214.

(²) *Voir* : Gerono, *Nouvelles Annales*, 18[illegible]; et Canon, *Nouvelles Annales*, 1903.

à la page 264, puis une autre qui, publiée en 1904, page 18 [1], renferme la construction suivante, la plus simple, je crois, des constructions connues :



Sur le cercle de centre I, *inscrit au triangle* ABC, *on prend le point* E' *diamétralement opposé au point* E, *où ce cercle touche* BC; *la droite qui passe par* E' *et par le milieu* L *de* AI *coupe le cercle inscrit au point où celui-ci est touché par le cercle des neuf points du triangle* ABC.

C'est en me servant de cette construction que je vais retrouver la suivante, due à W.-R. Hamilton :

Pour un triangle ABC, *par le point de contact* E *du côté* BC *et du cercle inscrit, on mène la droite qui passe par le point où la polaire de* A, *par rapport au cercle inscrit, coupe la droite* B'C' *qui joint les milieux de* AB *et* AC; *cette droite rencontre le cercle inscrit au point* Γ *où il est touché par le cercle des neuf points.*

Appelons T le point de rencontre des tangentes en E' et Γ au cercle inscrit. La polaire de T est E'Γ, par suite la polaire de L est la perpendiculaire TP à AI. On a alors

$$\mathrm{IL} \times \mathrm{IP} = \overline{\mathrm{IE}}^2 \qquad \text{ou} \qquad 2.\mathrm{IL} \times \frac{\mathrm{IP}}{2} = \overline{\mathrm{IE}}^2.$$

---

[1] Je l'avais déjà proposée, sous forme de question à résoudre, en 1902, page 95, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires.*

c'est-à-dire

$$AI \times \frac{IP}{2} = \overline{IE'}^2.$$

Ainsi, la polaire de A est la perpendiculaire à AI, elevée du milieu de IP, c'est donc la perpendiculaire abaissée du milieu J de IT sur AI. Cette droite rencontre EE' au point F, dont la polaire AQ est alors la perpendiculaire abaissée de A sur EE'.

Menons la droite E'T, elle est parallèle à IT, elle coupe alors ET au point V tel que

$$TV = TE'.$$

Il résulte de là que, si l'on appelle R le point où EV coupe AQ, les droites RQ, RE', RT, RE forment un faisceau harmonique.

Les rayons de ce faisceau déterminent sur QE une division harmonique, donc RT passe par F, qui est le pole de RQ.

La podaire FJ de A, passant par le milieu J de IT, coupe ER en son milieu U. On voit donc que *la droite ET passe par le point U, qui, sur la polaire de A, est à égales distances de A et de BC.*

C'est ce qu'il fallait démontrer.

[L[1]6a]

NOTE A PROPOS DE LA QUESTION 1960 (¹);

PAR M. A. MANNHEIM.

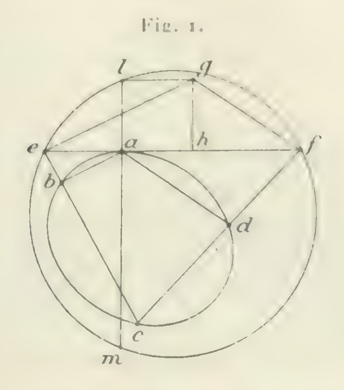
Ainsi que dans la solution insérée en 1903 (p. 476), commençons par parler de ce problème :

Construire (fig. 1) le rayon de courbure en un

(¹) *Nouvelles Annales*, 1903, p. 48 et 476.

point a d'une conique, connaissant la tangente en ce point et les points b, c, d.

Fig. 1.



Appelons e et f les points où la tangente en a est coupée par les droites cb, cd, et désignons par ρ le rayon de courbure de la conique pour le point a.

On a la relation [1]

$$(1)\qquad \frac{1}{ae} + \frac{1}{af} = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} eab} + \frac{1}{\operatorname{tang} daf}\right).$$

Au lieu de rester dans le cas général, nous allons supposer que les angles eab, daf sont égaux et que le point c est sur la normale en a. Pour bien marquer ces nouvelles données, nous supposons (*fig.* 2) que la conique est tangente en M à une ellipse donnée, qu'elle passe par les foyers F, F′ de cette courbe et par un point arbitraire C de la normale en M. Dans ces conditions, la relation (1) devient

$$(1)'\qquad \frac{1}{\mathrm{MB}} + \frac{1}{\mathrm{MD}} = \frac{1}{\rho \operatorname{tang} \mathrm{BMF}}.$$

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, [illegible]

Appelons N le point où la normale MC coupe FF'. Par F', N menons des parallèles à MB; elles coupent MF aux points G, L.

Les points M, G, L, F forment une division harmonique.

Fig. 2.

Par suite, il en est de même des points M, D', K, B. On a alors

$$\frac{2}{MK} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MD},$$

puisque

$$MD = MD'.$$

La relation (1)' devient alors

$$\frac{2}{MK} = \frac{1}{\rho \operatorname{tang}(BMF)}.$$

Abaissons la perpendiculaire KI sur MF, on a

$$MK = MI \operatorname{tang}(BMF),$$

par suite,

$$\frac{2}{MI} = \frac{1}{\rho}.$$

Le centre de courbure de la conique est donc le milieu ω *de* MI.

On voit que la construction de ω est réduite à ceci. On mène la droite CL. Du point où elle coupe la tangente MB on abaisse sur MF la perpendiculaire KI, le milieu ω de MI est le centre de courbure cherché.

On peut remarquer qu'on peut inversement prendre C, afin d'obtenir un centre de courbure que l'on se donne.

Remarquons encore que la construction ne dépend pas de la position des points F, F' sur les droites MF, MF'. Pour chacune des positions de la droite FF', qui tourne autour de N, on a une conique comme précédemment et *toutes ces coniques ont en* M *un contact du second ordre.*

Enfin, si le point C est le centre de courbure de l'ellipse donnée, il est sur la perpendiculaire élevée de L à MF, le point K appartenant à cette perpendiculaire, on voit que le point I se confond avec le centre de courbure de l'ellipse donnée. *Le centre de courbure* ω *est alors au milieu du rayon de courbure de l'ellipse donnée.* On peut donc énoncer cette propriété :

On a une ellipse de foyers F, F' *et dont le rayon de courbure pour son point* M *est* Mμ : *la conique tangente en* M *à l'ellipse, et qui passe par* F, F', μ, *a pour centre de courbure le milieu de* Mμ.

Arrivons maintenant à ce problème :

Construire le rayon de courbure en un point d'une conique, connaissant la tangente en ce point et trois autres tangentes.

Nous ne le traiterons ici qu'avec des données particulières. Démontrons d'abord ce lemme :

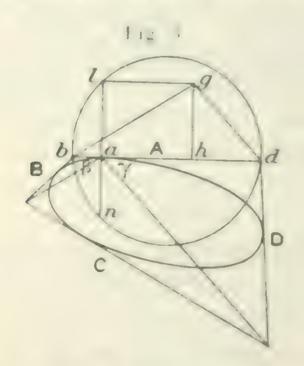
On donne une ellipse de foyers F, F' (fig. 2) ; si une conique touche cette courbe en M et passe par F, F', ses tangentes en ces points se coupent sur la normale en M à l'ellipse donnée.

Appelons T le point où la tangente en M à l'ellipse coupe l'axe focal. La polaire de ce point, par rapport à une conique qui passe par F, F' et est tangente en M à l'ellipse, est la normale MN, puisque N est conjuguée harmonique de T par rapport à F et F' et que cette droite passe par M.

Il résulte de là que les tangentes à cette conique aux points F, F' se coupent sur MN.

Dans le cas général où les données pour une conique sont (*fig.* 3) le point *a*, la tangente en ce point et les

Fig. 3.



tangentes B, C, D, on a pour déterminer le rayon de courbure de cette courbe la relation suivante [1] :

$$(1)\qquad \frac{1}{ab} - \frac{1}{ad} = \frac{2}{r}\left(\frac{1}{\operatorname{tang}\beta} - \frac{1}{\operatorname{tang}\gamma}\right).$$

---

[1] *Comptes rendus*, séance du 13 mars 1876.

Prenons maintenant des données particulières.

Supposons qu'en outre de la tangente en M (*fig.*) les trois tangentes données soient BF, FC, CD. La relation (2) devient

$$\frac{1}{\mathrm{MB}} + \frac{1}{\mathrm{MD}} = \frac{2}{r\,\mathrm{tang}(\mathrm{BMF})}.$$

Mais le premier membre de cette égalité, ainsi qu'on l'a vu précédemment, est égal à $\frac{2}{\mathrm{MK}}$, alors

$$\mathrm{MK} = r\,\mathrm{tang}(\mathrm{BMF}).$$

Donc le point I *est le centre de courbure demandé.*

On voit que, pour un point arbitraire C de la normale en M, il suffit de mener CL qui détermine K sur MB et d'abaisser de ce point la perpendiculaire KI sur MF : le point I est le centre de courbure demandé.

Dans le cas particulier où C est le centre de courbure de l'ellipse donnée pour le point M, il est sur la perpendiculaire élevée de F à FM et il en résulte que I coïncide avec C ; donc : *la conique, tangente en* M *à l'ellipse donnée, qui est tangente en* F *et* F', *aux droites qui vont de ces points au centre de courbure* c *de l'ellipse, a un contact du second ordre avec cette courbe* ([1]).

Pour terminer, voici une autre construction du point ω. On mène MP parallèlement à F'C, puis PQ parallèlement à CM : La perpendiculaire Qω à MF détermine ω sur MC.

([1]) *Voir* Koehler, *Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure,* 1re Partie, p. 258.

[B10a]

SUR LES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES QUI LAISSENT UNE FORME QUADRATIQUE INVARIANTE;

PAR M. H. LAURENT.

On a donné bien des moyens pour trouver les substitutions qui transforment une forme quadratique en elle-même ou qui laissent cette forme invariante. Je crois que la solution que je vais indiquer aura le mérite de la simplicité lorsqu'il s'agira d'applications. Soient a_{ij} des constantes et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les variables,

$$f = \sum a_{ij} x_i x_j$$

une forme à n variables. On peut exprimer la condition d'invariance au moyen de la formule

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum a_{ij} y_i y_j$$

ou

$$\sum a_{ij} (y_i y_j - x_i x_j) = 0,$$

$y_1, \ldots, y_n$ désignant de nouvelles variables; ou, en mettant les carrés en évidence,

$$\sum a_{ii} (y_i^2 - x_i^2) + \sum a_{ij} (y_i y_j - x_i x_j) = 0.$$

Sous le second signe $\sum$, i et j seront alors différents et l'on aura

$$\sum a_{ii} (y_i - x_i)(y_i + x_i)$$
$$+ \sum a_{ij} \tfrac{1}{2} [(y_i - x_i)(y_j + x_j) + (y_i + x_i)(y_j - x_j)] = 0;$$

ce qui revient à

$$\sum a_{ij}(y_i - x_i)(y_j + x_j) = 0.$$

ou, si l'on désigne par f_i la demi-dérivée de f relative à x_i :

$$(1) \qquad \sum (y_i - x_i) f_i(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots) = 0$$

Adjoignons à cette équation les suivantes, où les c_{ij} sont indépendants des x et des y :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{11}(x_1 - y_1) + \ldots + c_{1n}(x_n - y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}(x_1 - y_1) + \ldots + c_{nn}(x_n - y_n) = 0 ; \end{array} \right.$$

nous supposerons que les n équations (2) se réduisent à $n - 2$ distinctes, le système (1), (2) déterminera alors les $y_i - x_i$ en fonction des $y_i + x_i$ au moyen d'équations de la forme

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 - x_1 = k_{11} f_1 + k_{12} f_2 + \ldots + k_{1n} f_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n - x_n = k_{n1} f_1 + k_{n2} f_2 + \ldots + k_{nn} f_n, \end{array} \right.$$

les k_{ij} désignant des quantités indépendantes des x et des y ; quant à f_i il est mis pour abréger à la place de $f_i(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$, d'ailleurs il faudra supposer

$$k_{ii} = 0, \quad k_{ij} + k_{ji} = 0.$$

Vérifions que les équations (3) représentent bien les substitutions laissant f invariante. A cet effet multiplions la première formule (3) par f_1, la seconde par f_2..., la dernière par f_n et ajoutons ; nous aurons

$$\sum (y_i - x_i) f_i = 0.$$

équation qui en vertu de (1) est équivalente à

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum a_{ij} y_i y_j.$$

En particulier, si $f = \Sigma x_i^2$, les formules (3) deviennent

$$y_1 - x_1 = h_{11}(y_1 + x_1) + \ldots + h_{1n}(y_n + x_n),$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

et définissent une substitution orthogonale de déterminant $+1$.

Les formules (3) qui renferment $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres h_{ij} ont cela de remarquable que les y s'expriment en fonction des x sous forme rationnelle, en sorte que, si les nombres h_{ij} sont rationnels, les coefficients de la substitution seront des fonctions rationnelles des a_{ij} à coefficients rationnels.

Interprétons géométriquement les résultats qui précèdent : $f = 0$ représente une surface dans l'espace à n dimensions, cette surface est un cône. La substitution (3) laisse ce cône invariant, mais elle laisse encore invariantes n droites.

Posons, en effet,

$$y_i = s x_i,$$

les équations (3) deviennent

$$(s-1)x_1 = (s+1)[h_{11} f_1(x_1, x_2, \ldots) + \ldots + h_{1n} f_n(x_1, x_2, \ldots)],$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

ou

$$\frac{s-1}{s+1} x_1 = x_1 f_1(h_{11}, \ldots, h_{1n}) + x_2 f_2(h_{11}, \ldots, h_{1n}) + \ldots,$$
$$\frac{s-1}{s+1} x_2 = x_1 f_1(h_{21}, \ldots, h_{2n}) + x_2 f_2(h_{21}, \ldots, h_{2n}) + \ldots.$$

l'élimination des x fournit une équation du degré n en s, à chaque racine de cette équation correspondent des valeurs des x, que la substitution (3) multiplie simplement par s, et les valeurs des n définissent une droite passant par l'origine, droite qui reste invariante, quoique ses points ne soient pas invariants.

Il ne sera peut-être pas inutile de faire observer que les substitutions (3) que nous avons trouvées ont pour déterminant + 1, car, pour

$$k_{11} = k_{12} = \ldots = 0,$$

on a

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \ldots, \quad x_n = y_n.$$

Il ne serait pas difficile de se procurer des substitutions du déterminant — 1 en changeant quelques signes dans les formules (3).

[E5]

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi};$$

Par M. E. Guitton.

Je vais montrer que cette intégrale définie est la limite vers laquelle tend

$$J_m = \int_{-m}^{+m} \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2} dx$$

quand m augmente indéfiniment par valeurs entières.

Prouvons d'abord que J_m a pour limite $\sqrt{\pi}$.

Le changement de variable $x = m \sin\varphi$ donne

$$J_m = m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2m^2+1}\varphi\, d\varphi;$$

on est ainsi conduit à considérer

$$I_p = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^p \varphi\, d\varphi$$

(c'est ce qu'on fait quand on démontre la formule de Wallis).

On voit facilement que :

1° I_p diminue quand p augmente ;

2° $I_p = \frac{p-1}{p} I_{p-2}$.

Ceci permet de calculer I_p en remarquant que $I_1 = 2$, $I_0 = \pi$; ensuite de conclure que

$$I_p I_{p-1} = \frac{2\pi}{p},$$

$$\lim \frac{I_p}{I_{p-1}} = 1,$$

et finalement

$$\lim p I_p^2 = 2\pi.$$

Il reste pour achever à remplacer p par $2m^2+1$.

J'appelle A l'intégrale proposée. ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, il faut montrer que, à partir d'une certaine valeur de m, la différence entre A et J_m est inférieure à ε.

Il existe un nombre positif a tel que

$$A - \int_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx < \frac{\varepsilon}{2};$$

je vais faire grandir m en le prenant plus grand que a.

$\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2}$, quand $m\,(>x)$ grandit, va évidemment en croissant, et l'on sait qu'il tend vers e^{-x^2}, donc,

$$\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2} < e^{-x^2} \qquad (m > x).$$

Par suite,

$$\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2}dx < J_m < \int_{-m}^{+m} e^{-x^2}\,dx < A;$$

et

$$\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2}dx < J_m < \int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit de montrer que l'on a, à partir de m suffisamment grand,

$$\int_{-a}^{+a}\left[e^{-x^2}-\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2}\right]dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En développant la fonction sous le signe $\int$ suivant les puissances ascendantes de x, on trouve une série alternée ; on augmente sa valeur d'abord en prenant la série des valeurs absolues, ensuite en remplaçant x par a : elle devient alors

$$e^{a^2}-\left(1+\frac{a^2}{m^2}\right)^{m^2}.$$

Il suffit de prendre m assez grand pour que

$$e^{a^2}-\left(1+\frac{a^2}{m^2}\right)^{m^2} < \frac{\varepsilon}{a},$$

ce qui est possible, puisque le premier membre a pour limite zéro.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2025.

[illegible]

On donne quatre points quelconques sur un plan. On prend deux triangles ayant pour côté commun le segment compris entre deux de ces points et respectivement pour sommet opposé à ce côté l'un des deux autres points donnés. Chacun de ces triangles donne lieu à une droite qui joint les pieds des hauteurs issues des extrémités du côté commun. Par le point de rencontre des deux droites ainsi obtenues et par le milieu du côté commun, on mène une droite : les six droites, qu'on construit ainsi en changeant le côté commun, passent par un même point.

(*Canon.*)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Les six droites sont les six axes radicaux relatifs aux quatre cercles des neuf points des quatre triangles dont les sommets sont les quatre points donnés; ces cercles ayant un point commun les droites passent par ce point.

AUTRE SOLUTION

Par un Abonné.

Considérons l'hyperbole équilatère qui passe par les points donnés A, B, C, D. Les hauteurs AE, BF du triangle ABC se coupent en H, le quadrangle ABCH est inscrit à la courbe, la droite EF est la polaire du point où CH coupe AB, la droite EF passe par le pôle de AB. Le triangle ABD donne de même une droite passant par le pôle de AB. Les deux droites formées par les triangles ABC, ABD se coupent donc en un point (pôle de AB) tel que la droite joignant ce point au milieu de AB passe au centre de l'hyperbole équilatère. Donc....

[M[1]1b]

ÉTUDE DES POINTS A L'INFINI D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE (¹);

PAR MM. PERNOT ET MOISSON,
Anciens élèves de l'École Polytechnique.

On sait que les points communs à la courbe et à la droite de l'infini sont dans les directions obtenues en égalant à zéro les termes du plus haut degré :

$$x^p y^q (y - ax)^\alpha (y - bx)^\beta \ldots (y - lx)^\lambda = 0.$$

La multiplicité du point à l'infini dans la direction $y = ax$ est obtenue en coupant par $y - ax = \delta$, et constatant l'abaissement du degré de l'équation aux x de rencontre.

Pratiquement, on cherche le groupe homogène de degré le plus élevé qui ne soit pas divisible par $y - ax$: la différence entre le degré de l'équation et celui de ce groupe homogène est l'ordre de multiplicité du point à l'infini.

Si cet ordre est α, la droite à l'infini, rencontrant en α points seulement, n'est pas tangente ; on trouvera α asymptotes, réelles ou imaginaires à distance finie.

Si l'ordre est inférieur à α, la droite à l'infini est nécessairement tangente, il y a branche parabolique simple ou multiple ; il peut y avoir certaines branches de courbe à l'infini ayant une tangente ordinaire, c'est-à-dire que la courbe peut avoir simultanément des

(¹) Cet article fait suite à celui qui a pour titre : *Sur la construction des courbes algébriques* (p. 106 du présent Tome).

branches paraboliques et des branches hyperboliques dans une même direction.

Nous étudierons d'abord les branches hyperboliques dans les directions où l'ordre de multiplicité du point est le même que celui de la direction asymptotique ; en second lieu, les branches paraboliques existant seules ; enfin les branches hyperboliques et paraboliques simultanées.

Les procédés employés sont analogues à ceux employés pour l'étude de la courbe aux environs d'un point à distance finie ; ces procédés permettent d'obtenir un tracé correct de la courbe et de fixer la position ainsi que le genre des branches paraboliques.

I. — Direction asymptotique simple.

Soit $y - cx = 0$, cette direction. L'équation de la courbe est de la forme

$$(y - cx)\psi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-r}(x, y) + \ldots = 0.$$

Si $\varphi_{n-1}(x, y)$ est identiquement nul, la droite $y - cx = 0$ est l'asymptote elle-même, car elle rencontre la courbe en deux points au moins, confondus en un point simple à l'infini, elle est donc tangente à l'infini.

Supposons $\varphi_{n-1}(x, y)$ non identiquement nul et soit $\varphi_{n-r}(x, y)$ de degré $n - r$ le groupe homogène suivant par ordre de degrés décroissants.

Posons $y = tx$, t a pour limite c quand x et y croissant sans limite, le point qui décrit la courbe s'éloigne à l'infini dans la direction considérée. Il vient

$$(y - cx)\psi_{n-1}(1, t)x^{n-1} + \varphi_{n-1}(1, t)x^{n-1} + \varphi_{n-r}(1, t)x^{n-r} + \ldots = 0$$

ou

$$y - cx = -\frac{\varphi_{n-1}(1, t) + \frac{1}{x^{r-1}}\varphi_{n-r}(1, t) + \ldots}{\psi_{n-1}(1, t)}.$$

Quand x croît sans limite, la limite de $y - cx$ est l'ordonnée à l'origine d de l'asymptote. On a donc

$$d = -\lim \frac{\varphi_{n-2}(1, t) + \frac{1}{x^{r-1}} \varphi_{n-r}(1, t) + \ldots}{\psi_{n-1}(1, t)} = -\frac{\varphi_{n-2}(1, c)}{\psi_{n-1}(1, c)};$$

on retrouve la règle connue. L'asymptote est alors la droite

$$y - cx - d = 0.$$

Pratiquement, on résout l'équation de la courbe par rapport au facteur $y - cx$ pris dans les termes du plus haut degré

$$y - cx = -\frac{\varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-r}(x, y) + \ldots}{\psi_{n-1}(x, y)}.$$

On remplace dans le second membre y par cx, il reste une fraction rationnelle, quotient de deux polynomes entiers en x, dont on cherche la limite pour x infini.

Exemple :

$$x^2(2x - 3y) - (y - x)(3y + x) - y - 2x = 0.$$

Cherchons l'asymptote parallèle à $2x - 3y = 0$. On a

$$2x - 3y = \frac{(y - x)(3y + x) + y + 2x}{x^2}.$$

Remplaçons dans le second membre y par $\frac{2}{3}x$ en remarquant qu'il suffit de faire la substitution dans les termes du second degré. On a

$$\frac{-\frac{1}{3}x \times 3x + \ldots}{x^2}$$

dont la limite est -1. L'asymptote cherchée est

$$2x - 3y = -1$$

Position de la courbe par rapport à l'asymptote. — Elle est donnée par le signe de $y - cx - d$ ou, plus généralement, si l'asymptote est

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

la position est donnée par le signe de $\alpha x + \beta y + \gamma$ pour les coordonnées du point de la courbe quand il s'éloigne à l'infini, l'asymptote partageant le plan en deux régions pour les points desquelles la fonction $\alpha x + \beta y + \gamma$ est d'un signe ou de l'autre.

L'asymptote rencontre la courbe en deux points à l'infini au moins. L'équation de la courbe peut donc se mettre sous la forme

$$(y - cx - d)[\varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y)] + \chi(x, y) = 0,$$

$\chi(x, y)$ étant un polynome de degré au plus égal à $n-2$. Effectuons la division de $\chi(x, y)$ par

$$y - cx - d;$$

on aura

$$\chi(x, y) = (y - cx - d)\,Q(x, y) + R(x),$$

$R(x)$ étant un polynome de degré $n - p$, avec $p \geq 2$.

On a donc

$$y - cx - d = \frac{-R(x)}{\varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y) + Q(x, y)}$$

$$= \frac{-(a_0 x^{n-p} + \dots)}{x^{n-1}\varphi_{n-1}(1, t) + x^{n-2}\varphi_{n-2}(1, t) + \dots}$$

$$= \frac{1}{x^{p-1}}\,\frac{-\left(a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dots\right)}{\varphi_{n-1}(1, t) + \dfrac{1}{x}\varphi_{n-2}(1, t) + \dots}.$$

Quand x croît sans limite, le second facteur du second membre a pour limite $-\frac{a_0}{\psi_{n-1}(1,c)}$. Le signe $y - cx - d$ pour x infini est donc celui de

$$-\frac{a_0}{x^{p-1}\psi_{n-1}(1,c)}.$$

Le calcul se fait pratiquement de la manière suivante : on écrit

$$y - cx - d = -\frac{\varphi_{n-1}(x,y) + \varphi_{n-2}(x,y) + \ldots}{\psi_{n-1}(x,y)} - d.$$

On réduit le second membre au même dénominateur; dans le numérateur de la fraction obtenue, on remplace y par $cx + d$, ce numérateur se réduit alors à $-R(x)$; dans le dénominateur, on remplace y par cx et l'on prend les termes de plus haut degré en x au numérateur et au dénominateur; le signe de leur rapport est celui de $y - cx - d$.

Si p est pair, la courbe est de part et d'autre de son asymptote. Il y a contact simple à l'infini si $p = 2$, point méplat à l'infini si $p = 2K$ avec $K > 1$.

Si p est impair, il y a inflexion à l'infini et les deux branches de courbe sont asymptotes du même côté de la droite.

Dans les deux cas, la courbe est asymptote aux deux extrémités de la droite.

Remarquons enfin que, si $R(x) = 0$, on a

$$y - cx - d = 0.$$

Les racines de $R(x)$ sont donc les abscisses des points de rencontre à distance finie de la courbe et de son asymptote. Pour la position de la courbe, il suffit de calculer le terme de plus haut degré de $R(x)$, qui permet de conclure.

Exemple. — Reprenons la courbe donnée en exemple précédemment

$$x^2(2x - 3y) - (y - x)(3y + x) + y - 2x = 0.$$

L'asymptote est

$$2x - 3y + 1 = 0.$$

L'équation de la courbe donne

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 1 &= \frac{(y - x)(3y + x) - y + 2x}{x^2} + 1 \\ &= \frac{3y^2 - 2xy - y + 2x}{x^2}. \end{aligned}$$

Remplaçons dans le second membre y par $\frac{2x + 1}{3}$. Il vient, réductions faites,

$$\frac{6x + 2}{3x^2}.$$

Le signe de cette expression est celui de $\frac{2}{x}$ pour x croissant sans limite. La courbe est donc dans la région positive (celle de l'origine) par rapport à l'asymptote pour x infiniment grand positif, et de l'autre côté pour x négatif. Il y a contact simple à l'infini. L'asymptote rencontre la courbe à distance finie en un troisième point dont l'abscisse est $-\frac{1}{3}$ et, par suite, l'ordonnée $\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3} + 1\right)$ ou $+\frac{1}{9}$.

Remarque. — Pour la détermination de l'asymptote, tout se passe comme si la courbe proposée était remplacée par la courbe

$$(y - cx)\psi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) = 0,$$

courbe unicursale de degré n, puisqu'elle a un point multiple d'ordre $n - 1$ à l'origine.

Pour l'étude de la position de la courbe par rapport à son asymptote, il faut prendre un terme de plus (généralement suffisant) et considérer la courbe

$$(y - cx)\psi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-r}(x, y) = 0$$

ou

$$\begin{aligned}(y - cx - d)\psi_{n-1}(x, y) \\ = -\varphi_{n-1}(x, y) - d\psi_{n-1}(x, y) - \varphi_{n-r}(x, y),\end{aligned}$$

qu'on transforme immédiatement en la suivante, qui est unicursale :

$$\begin{aligned}x^{n-1}(y - cx - d)\psi_{n-1}(1, c) \\ = -\varphi_{n-1}(x, cx + d) \\ - d\psi_{n-1}(x, cx + d) - \varphi_{n-r}(x, cx + d).\end{aligned}$$

Si le degré du second membre s'abaisse au-dessous de $n - r$, il faut alors prendre un terme de plus dans l'équation de la courbe proposée et l'on ramène de la même façon à une courbe unicursale.

II. — Point double a l'infini.

L'équation de la courbe peut s'écrire, en supposant les asymptotes à distance finie,

$$\begin{aligned}(y - cx)^2\psi_{n-2}(x, y) + (y - cx)\chi_{n-2}(x, y) \\ + \varphi_{n-2}(x, y) + \varphi_{n-3}(x, y) + \ldots = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(y - cx)^2\psi_{n-2}(1, t) + (y - cx)\chi_{n-2}(1, t) \\ + \varphi_{n-2}(1, t) + \frac{1}{x}\varphi_{n-3}(1, t) + \ldots = 0;\end{aligned}$$

en posant $y = tx$, ou encore

$$(y - cx - \alpha')(y - cx - \alpha'') + \frac{1}{x}\varphi_{n-3}(1, t) + \ldots = 0.$$

α' et α'' étant les racines de l'équation en α,

$$\alpha^2 \varphi_{n-2}(1, t) - \alpha \chi_{n-2}(1, t) + \psi_{n-2}(1, t) = 0.$$

Quand x et y croissent sans limite de telle sorte que t tende vers c, c'est-à-dire quand le point s'éloigne à l'infini sur la courbe dans la direction donnée, α' et α'' ont pour limites les racines d' et d'' de l'équation en d :

$$d^2 \varphi_{n-2}(1, c) - d \chi_{n-3}(1, c) + \psi_{n-4}(1, c) = 0,$$

$\chi_{n-2}(1, c)$ et $\psi_{n-2}(1, c)$ pouvant être différents de zéro ou nuls, sans que les résultats suivants en soient changés, contrairement à la discussion analogue des tangentes en un point double à distance finie.

On a

$$(y - cx - \alpha')(y - cx - \alpha'') = -\frac{1}{x}\varphi_{n-3}(1, t) \ldots$$

Par suite, quand x et y croissent sans limite :

$$\lim (y - cx - d')(y - cx - d'') = 0.$$

L'un des facteurs au moins a donc une limite nulle. On vérifie facilement que l'une quelconque des deux droites

$$y - cx - d' = 0, \qquad y - cx - d'' = 0$$

est asymptote, c'est-à-dire qu'elle rencontre la courbe en trois points au moins à l'infini. En effet, si l'on coupe la courbe par une quelconque de ces droites, la première par exemple, on est ramené au système des deux équations

$$\begin{gathered} d'^2 \varphi_{n-2}(x, cx + d') - d' \chi_{n-3}(x, cx + d') \\ + \psi_{n-4}(x, cx + d') - \varphi_{n-3}(x, cx + d') + \ldots = 0, \\ y = cx + d'; \end{gathered}$$

les termes de degré $n-2$ de la première sont

$$d^2\psi_{n-2}(x, cx) + d\chi_{n-2}(x, cx) + \varphi_{n-2}(x, cx);$$

le coefficient de x^{n-2} est

$$d^2\psi_{n-2}(1, c) + d\chi_{n-2}(1, c) + \varphi_{n-2}(1, c),$$

qui est nul.

La première équation est donc au plus de degré $n-3$ et la droite considérée rencontre bien la courbe en trois points à l'infini.

Par suite, le faisceau des deux asymptotes est

$$(y-cx)^2\psi_{n-2}(1, c) + (y-cx)\chi_{n-2}(1, c) + \varphi_{n-2}(1, c) = 0.$$

On l'obtient pratiquement en prenant les termes de degré n, de degré $n-1$ et de degré $n-2$, en mettant $(y-cx)^2$ en facteur dans les premiers, $y-cx$ dans les seconds et en remplaçant dans les autres facteurs x par 1 et y par c.

Si, dans l'équation ainsi obtenue, on remplace $y-cx$ par d, on a l'équation aux ordonnées à l'origine d' et d'' des asymptotes.

Exemple. — Soit la courbe

$$(x-y)^2(x+y)^2 + (x-y)(x+y)(2y-x)$$
$$- (3x-y)(2y+x) + x = 0.$$

Cherchons les asymptotes parallèles à $x-y=0$. Prenons les trois premiers groupes du premier membre en y remplaçant $(x-y)^2$ par d^2, $x-y$ par d et partout ailleurs x et y par 1, puisque le coefficient angulaire est 1. On a

$$4d^2 + 2d - 6 = 0, \qquad d' = 1, \qquad d'' = -\frac{3}{2}.$$

Les deux asymptotes sont

$$x - y - 1 = 0, \qquad x - y + \frac{3}{2} = 0.$$

On aurait de même les deux asymptotes parallèles à $x + y = 0$.

Discussion. — Si d' et d'' sont imaginaires, on a un point double isolé. Si d' et d'' sont réels et distincts, on a deux asymptotes parallèles tangentes à l'infini à deux branches de courbes réelles. Si l'équation en d a une racine double, on a une asymptote double ; la réalité des branches de courbe à l'infini dans ce cas sera discutée plus loin.

Tout se passe comme si la courbe était remplacée par la courbe auxiliaire :

$$(y - cx)^2\varphi_{n-2}(x, y) + (y - cx)\chi_{n-2}(x, y) + \psi_{n-2}(x, y) = 0.$$

Position de la courbe par rapport à son asymptote. — L'asymptote tangente en un point double à l'infini y rencontre la courbe en trois points au moins. Si les deux asymptotes sont distinctes, on peut écrire

$$y - cx - d'$$
$$= \frac{-(y - cx)\chi_{n-2}(x, y) - \psi_{n-2}(x, y) - \psi_{n-3}(x, y) - \ldots}{(y - cx)\varphi_{n-2}(x, y)} - d'.$$

On verrait alors, par le même raisonnement que dans le cas de l'asymptote simple, que le signe du premier membre pour x infini est celui du second membre dans lequel on a remplacé y par $cx + d'$ et que le numérateur de la fraction est alors un polynome de degré au plus égal à $n - 3$. Tout se passe donc alors comme si l'on considérait la courbe

$$(y - cx)^2\varphi_{n-2}(x, y) + (y - cx)\chi_{n-2}(x, y)$$
$$+ \psi_{n-2}(x, y) + \psi_{n-3}(x, y) = 0,$$

obtenue en prenant les quatre premiers groupes de l'équation proposée. La courbe précédente peut alors elle-même être remplacée par la suivante qui s'en déduit :

$$(y - cx - d')(y - cx)\psi_{n-2}(x, y) + \Phi_{n-3}(x, y) = 0.$$

Enfin cette courbe peut elle-même être remplacée par la courbe unicursale

$$d'(y - cx - d')\psi_{n-2}(1, c) + \frac{1}{x}\Phi_{n-3}(1, c) = 0.$$

Ce sont ces différentes transformations qu'on opère en agissant comme il est dit.

Si le degré du numérateur de la fraction obtenue s'abaissait au-dessous de $n - 3$, il faudrait alors prendre en plus dans l'équation le groupe $\varphi_{n-4}(x, y)$ et ainsi de suite; et, d'une manière générale, tout se passerait comme si l'on remplaçait à l'infini la courbe proposée par une courbe unicursale de la forme

$$d'(y - cx - d')\psi_{n-2}(1, c) + \frac{1}{x^p}\Phi_{n-p-2}(1, c) = 0.$$

Exemple. — Appliquons ce procédé à la courbe étudiée précédemment

$$(x - y)^2(x + y)^2 - (x - y)(x - y)(2y - x) \\ - (3x - y)(2y - 2) + x = 0$$

et à son asymptote $x - y - 1 = 0$. On a

$$x - y = \frac{-(x + y)(x - y)(2y - x) + (3x - y)(2y + x) - x}{(x - y)(x + y)^2}.$$

D'où

$$x - y - 1 = \frac{\left\{ \begin{array}{r} -(x + y)(x - y)(2y - x) + (3x - y)(2y + x) \\ - x - (x - y)(x + y)^2 \end{array} \right\}}{(x - y)(x + y)^2}.$$

Remplaçons dans le second membre x par $y + 1$, il se réduit, tous calculs faits, à

$$\frac{3y}{(2y+1)^2},$$

ce qui, pour y infiniment grand, montre que la fonction $x - y - 1$ est du signe de y et, par suite, qu'à l'infini la courbe est par rapport à son asymptote dans la même région que l'origine du côté des y négatifs et dans la région opposée du côté des y positifs. La courbe coupe l'asymptote au point pour lequel $y = 0$.

Si $d' = d'' = d$, c'est-à-dire si l'asymptote est double, l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$(y - cx - d)^2 \psi_{n-2}(x, y) + \varphi_{n-3}(x, y) + \ldots = 0.$$

La discussion s'opère alors de la même façon que pour les tangentes doubles à l'origine.

Si $\varphi_{n-3}(1, c) \gtrless 0$, tout se passe comme si l'on avait la courbe

$$(y - cx - d)^2 = -\frac{1}{x}\,\frac{\varphi_{n-3}(1, c)}{\psi_{n-2}(1, c)}.$$

Il y a rebroussement de première espèce à l'infini, dans la région des x positifs ou négatifs suivant le signe du coefficient de $\frac{1}{x}$. La courbe auxiliaire a son équation résoluble en y :

$$y = cx + d \pm \sqrt{-\frac{1}{x}\,\frac{\varphi_{n-3}(1, c)}{\psi_{n-2}(1, c)}}.$$

Si $\varphi_{n-3}(1, c) = 0$ ou si $\varphi_{n-3}(x, y)$ est identiquement nul, on opère d'une façon générale comme pour les tangentes, et le procédé pratique de calcul peut s'énoncer de la façon suivante :

On met d'abord l'équation de la courbe sous la forme

$$(y - cx - d)^2 \psi_{n-2}(x, y) + \varphi_{n-p}(x, y) \cdots\ldots$$

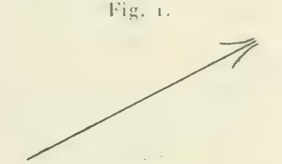
en remplaçant dans l'équation de la courbe ordonnée en groupes homogènes $(y - cx)^2$ par $(y - cx - d)^2$, puis en complétant l'équation par les termes ainsi ajoutés changés de signe; on conserve dans ce qui suit les groupes successifs en s'arrêtant au premier non divisible par $y - cx$.

1° *Le second groupe $\varphi_{n-p}(x, y)$ n'est pas divisible par $y - cx$.* — On remplace, dans ψ_{n-2} et dans φ_{n-p}, y par cx, ce qui revient à prendre la courbe auxiliaire

$$(y - cx - d^2) = -\frac{1}{x^{p-2}} \frac{\psi_{n-2}(1, c)}{\varphi_{n-2}(1, c)}.$$

Si p est impair, on a rebroussement de première espèce (*fig.* 1).

Fig. 1.



Si p est pair, point double isolé à l'infini si le coefficient $A = -\frac{\psi_{n-2}(1, c)}{\varphi_{n-2}(1, c)}$ est négatif.

Si p est pair et A positif, on a deux branches de courbe tangentes à l'infini de part et d'autre de l'asymptote (*fig.* 2).

2° *Un certain nombre de groupes sont divisibles par $y - cx$.* — On cherche après le premier terme tous ceux consécutifs qui sont divisibles par $(y - cx)^2$ et l'on remplace comme précédemment $(y - cx)^2$ par

$(y - cx - d)^2$; dans les termes qui suivent, on remplace de même $y - cx$ par $y - cx - d$, de façon à

Fig. 2.



mettre l'équation sous la forme

$$(y - cx - d)^2 \Psi_{n-2}(x, y) + (y - cx - d)\Phi_{n-q}(x, y) + X_{n-r}(x, y) + \ldots = 0.$$

Dans les trois polynomes Ψ, Φ, X ainsi formés, on ne conserve que les groupes homogènes de plus haut degré et l'on y remplace y par cx. On obtient ainsi l'équation

$$(y - cx - d)^2 \psi_{n-2}(1, c) + \frac{1}{x^{q-2}}(y - cx - d)\varphi_{n-q}(1, c) + \frac{1}{x^{r-2}}\chi_{n-r}(1, c) = 0.$$

Enfin on décompose en une somme de carrés le trinome en $y - cx - d$ ainsi formé. S'il est carré parfait, on prend un groupe de plus dans l'équation. On le met ainsi, dans tous les cas, sous la forme

$$\left(y - cx - d - \frac{A}{x^{q-2}}\right)^2 = \frac{B}{x^h}.$$

Tout revient à remplacer la courbe proposée par la précédente.

h impair. — Rebroussement de seconde espèce (*fig.* 3).

h pair. — Point double isolé si $B < 0$; contact double

Fig. 3.



à l'infini si $B > 0$ [d'un même côté si q pair (*fig.* 4);

Fig. 4.



de part et d'autre si q impair (*fig.* 5)].

Fig. 5.



III. — Point multiple d'ordre p.

La détermination des asymptotes se ferait de la même façon que pour le point double. L'équation est de la forme

$$(y - cx)^p \psi_{n-p} + (y - cx)^{p-1} \psi_{n-p} + \ldots$$
$$+ (y - cx) \psi_{n-p}^{p-1} + \psi_{n-p}^{p} + \ldots = 0.$$

En remplaçant dans les $p + 1$ premiers termes $y - cx$

par d, puis, dans les fonctions $\frac{\varphi}{\psi}$, x par 1 et y par c, on aura l'équation aux ordonnées à l'origine des asymptotes. Pour avoir la position par rapport à l'une des asymptotes $y = cx + d$, on étudie comme précédemment le signe du facteur $y - cx - d$.

IV. — Asymptotes parallèles aux axes.

La théorie précédente ne suppose pas $c \neq 0$ et s'applique encore aux asymptotes parallèles à Ox. Dans les différents groupes homogènes, on remplace donc x par 1 et y par 0.

Exemple :

$$y(y^2 - x^2) + x^2 - 2xy + 2y - x = 0.$$

On résout l'équation par rapport au facteur y des termes de plus haut degré,

$$y = \frac{-x^2 + 2xy + \ldots}{y^2 - x^2}.$$

Pour $y = 0$, le second membre se réduit à 1. L'asymptote est

$$y - 1 = 0.$$

On retrouve ainsi la règle connue pour obtenir les asymptotes parallèles aux axes. Pour étudier la position de la courbe, on tire

$$y - 1 = \frac{-x^2 + 2xy - 2y + x}{y^2 - x^2} - 1 = \frac{2xy - 2y + x - y^2}{y^2 - x^2}.$$

Pour $y = 1$, le second membre, quand x est infini, a le signe de $-\frac{1}{x}$, ce qui détermine la position par rapport à l'asymptote $y - 1 = 0$.

Pour les asymptotes parallèles à Oy, il suffit de

changer x en y et y en x dans les raisonnements faits pour les asymptotes parallèles à Ox. Dans les groupes homogènes facteurs des diverses puissances de x, on remplacera donc x par o et y par 1.

V. — Branches paraboliques.

Pour étudier les types de branches paraboliques, il est plus commode de supposer que la direction asymptotique est celle de Ox.

Quand la droite à l'infini est tangente ordinaire en un point simple, on a comme parabole asymptotique

$$y^2 = ax.$$

En coordonnées homogènes :

$$y^2 = axt;$$

sous cette forme, on voit que $t = 0$ rencontre en deux points : c'est la forme ordinaire des paraboles du second degré.

$y^3 = ax^2t$ donne un point d'inflexion sur la droite à l'infini, $t = 0$, qui rencontre en trois points confondus. Les branches infinies ont la disposition de la figure 6.

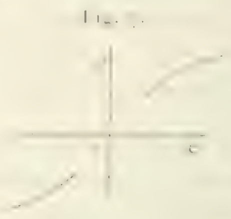
Fig. 6.

$y^3 = axt^2$ correspond à un point double à l'infini, avec rebroussement sur la droite à l'infini (*fig.* 7) qui doit être considérée comme une tangente double.

En général, le genre $y^p = ax^{p-1}t$ correspond à une

branche simple du type des branches paraboliques du second degré, ou du type de la figure 6, suivant que p est pair ou impair.

Fig. 7.



Le type $y^p = a x^{p-2} t^2$ correspond à un point double à l'infini : si p est impair, on a la disposition de la figure 7 ; si p est pair, par exemple,

$$y^4 = a x^2.$$

Pour $a > 0$, on a quatre branches paraboliques

$$y^2 = \pm x\sqrt{a},$$

symétriques par rapport à Oy.

Pour $y^6 = a x^4$, on aurait quatre branches du genre

$$y^3 = k x^2,$$

symétriques par rapport à Oy.

On voit aisément comment on étudie le cas général correspondant à

$$y^p = a x^{p-q}.$$

Nous allons nous proposer d'étudier, pour une direction quelconque, le genre de la branche parabolique et son amplitude par la grandeur du coefficient a.

Le même procédé permettrait de trouver le plus souvent une parabole d'équation simple asymptote à la courbe proposée, et la position par rapport à cette parabole ; mais ce procédé n'est pratique que dans le cas d'une branche parabolique du premier ou du second

type. On peut, dans le cas général, placer exactement la branche parabolique, sans qu'il soit nécessaire d'avoir une parabole asymptote.

Nous supposerons d'abord que dans une direction donnée, $y - mx = 0$, la droite de l'infini est seule tangente à la courbe à l'infini, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de branche hyperbolique dans la même direction.

I. *Droite de l'infini tangente en un point simple.* — L'équation de la courbe est de la forme

$$(y - mx)^p \psi_{n-p}(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y) + \ldots = 0,$$

avec la condition $\varphi_{n-1}(1, m) \neq 0$. La droite de l'infini rencontre la courbe en p points confondus; il y a inflexion graphique ou point méplat à l'infini suivant que p est impair ou pair et supérieur à 2, contact simple si $p = 2$.

Toute courbe de la forme

$$(y - mx)^p + \lambda x^{p-1} = 0$$

a en commun, avec la courbe donnée, p points à l'infini au point considéré; cherchons à déterminer λ par la condition qu'un $(p+1)^{\text{ième}}$ point commun s'éloigne à l'infini. La courbe ainsi obtenue aura, par rapport à la droite de l'infini, même position que la courbe donnée et servira de courbe auxiliaire pour caractériser la forme de la branche parabolique à étudier. On peut écrire

$$\varphi_{n-1}(x, y) = (y - mx)\chi_{n-2}(x, y) + Ax^{n-1},$$

A étant un coefficient numérique non nul. Soit de même

$$\psi_{n-p}(x, y) = (y - mx)\chi_{n-p-1}(x, y) + Bx^{n-p}.$$

L'équation de la courbe donnée peut être remplacée par

$$-\lambda x^{p-1}[(y-mx)f_{n-p-1}(x,y)+Bx^{n-p}]$$
$$+(y-mx)f_{n-2}(x,y)+Ax^{n-1}+\ldots=0.$$

Déterminons λ par la condition que

$$A=\lambda B.$$

Cette équation devient

$$(y-mx)[-\lambda x^{p-1}f_{n-p-1}(x,y)+f_{n-2}(x,y)]$$
$$+\varphi_{n-2}(x,y)+\ldots=0,$$

et la courbe donnée a bien, avec la courbe auxiliaire, $p+1$ points au moins communs à l'infini.

Pratiquement, on remarque que Ax^{n-1} et Bx^{n-p} sont les restes des divisions de φ_{n-1} et de ψ_{n-p} par $y-mx$, c'est-à-dire les résultats de la substitution de mx à y dans ces polynomes et l'on obtient la courbe auxiliaire par le procédé de résolution déjà employé pour les tangentes à l'origine et les asymptotes. On écrit

$$(y-mx)^p=-\frac{\varphi_{n-1}(x,y)+\ldots}{\psi_{n-p}(x,y)}.$$

La courbe auxiliaire est alors

$$(y-mx)^p=-\frac{\varphi_{n-1}(x,mx)}{\psi_{n-p}(x,mx)}=-\frac{\varphi_{n-1}(1,m)}{\psi_{n-1}(1,m)}x^{p-1},$$

courbe unicursale. Si p est pair, il y a à l'infini deux branches de courbe de part et d'autre de la droite $y-mx=0$ et toutes deux du côté des x positifs ou du côté des x négatifs. Si p est impair, il y a inflexion à l'infini, les deux branches sont l'une du côté des x positifs, l'autre du côté des x négatifs, toutes deux d'un même côté par rapport à la droite $y-mx=0$.

La courbe auxiliaire précédente fixe le genre de la

branche parabolique considérée et permet de lui donner la même amplitude que celle de la parabole asymptotique. La recherche d'une parabole asymptote n'est possible pratiquement que dans les cas simples, par la détermination de la limite de $(y - mx)^p + \lambda x^{p-1}$.

On peut trouver la position par rapport à la courbe auxiliaire de la manière suivante, si l'on a besoin d'étudier plus complètement la branche de courbe considérée, en opérant toujours d'une manière analogue à celle qu'on emploierait pour une courbe unicursale.

On peut écrire

$$(y - mx)^p + \lambda x^{p-1}$$
$$= -\frac{\varphi_{n-1}(x, y) - \lambda x^{p-1}\psi_{n-p}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y) + \ldots}{\psi_{n-p}(x, y)}.$$

Il résulte de la manière même dont λ a été déterminé que ceci peut s'écrire

$$(y - mx)^p + \lambda x^{p-1}$$
$$= -\frac{(y - mx)\Phi_{n-2}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y) + \ldots}{\psi_{n-p}(x, y)}.$$

Pour les valeurs de x et de y infiniment grandes, si $\Phi_{n-2}(1, m) \neq 0$, le second membre, donc aussi le premier, sont du signe de

$$-(y - mx)x^{p-2}\frac{\Phi_{n-2}(1, m)}{\psi_{n-p}(1, m)},$$

et l'on voit ainsi dans quelles régions du plan sont les branches de la courbe donnée par rapport à celles de la courbe auxiliaire. Si $\Phi_{n-2}(1, m) = 0$, on a

$$\Phi_{n-2}(x, y) = (y - mx)^\alpha Q(x, y)$$

et le signe est celui de

$$-(y - mx)^{\alpha+1}x^{p-\alpha}\frac{Q(1, m)}{\psi_{n-p}(1, m)}.$$

Enfin, si $\Phi_{n-2}(x, y)$ est identiquement nul, on opère de même sur le groupe suivant $\varphi_{n-2}(x, y)$ du numérateur.

Exemple. — Soit la courbe

$$(y-2x)^2(x-y)^2+(x^2+y^2)(x+y)+\ldots=0,$$

on a

$$(y-2x)^2=-\frac{(x^2+y^2)(x+y)+\ldots}{(x-y)^2}.$$

La courbe auxiliaire est

$$(y-2x)^2=-15x,$$

parabole ayant ses branches infinies du côté des x négatifs.

L'équation de la courbe peut s'écrire

$$(y-2x)^2+15x=-\frac{(x^2+y^2)(x+y)-15x(x-y)^2}{(x-y)^2}$$

$$=-\frac{(y-2x)(y^2-12xy+7x^2)+\ldots}{(x-y)^2}.$$

Le second membre est du signe de $13(y-2x)$, ce qui fixe la position de la courbe au-dessus et au-dessous du diamètre $y-2x=0$, par rapport à la parabole asymptotique.

II. *Droite de l'infini tangente en un point multiple.* — $(y-ax)^p$ étant en facteur dans les termes du plus haut degré, supposons que le point correspondant soit de multiplicité $q<p$. Cela veut dire qu'en remplaçant y par $ax+\lambda$, l'équation en x est de degré $p-q$.

Le genre de la branche parabolique est celui de

$$y^q=Ax^{p-q}$$

et, dans le cas qui nous occupe,

$$(y - ax)^p = A x^{p-q}.$$

Proposons-nous de déterminer le signe et la valeur numérique de A, quand x et y augmentent indéfiniment, $\frac{y}{x}$ prenant la valeur a.

Pour qu'il n'y ait pas de branches hyperboliques, il faut que, si l'on coupe par $y = ax + \lambda$, l'annulation du coefficient de la plus haute puissance de x ne donne pas de valeurs finies pour λ, c'est-à-dire que ce coefficient se réduise à une constante.

$y - ax$ peut être en facteur dans plusieurs groupes homogènes; il faut cependant que les groupes contenant ce facteur ne contiennent pas, en dehors de ce facteur, des termes de degré supérieur ou égal à $p - q$, sans quoi il y aurait une ou plusieurs branches hyperboliques.

Nous allons le montrer sur un exemple :

Soit la courbe

$$x^3(y - 2x)^4 - (y - 2x)^3(y + x)^3$$
$$+ (y - 2x)^2 x^3 - xy^3 - y^4 - x^2 = 0.$$

Si l'on coupe par $y - 2x = \lambda$, l'équation s'abaisse au quatrième degré; il y a point triple à l'infini.

Pour que l'équation aux x de rencontre ait une racine de plus infinie, on annule le coefficient de la plus haute puissance de x, c'est-à-dire, dans ce cas, le coefficient de x^4. Pour qu'il n'y ait pas de valeurs finies de λ satisfaisant à cette condition, il faut que le coefficient de x^4 soit une constante, ce qui a lieu parce que les facteurs multipliant $y - 2x$ ne sont pas de degré 4; il est évident que, si l'on mettait, par exemple, $(y - 2x)^2 x^4$ au lieu de $(y - 2x)^2 x^3$, il y aurait une

asymptote à distance finie, donnée en annulant le coefficient de x^3 :

$$\lambda + 8 = 0.$$

Reprenons la courbe proposée. On peut écrire

$$(y - 2x)^2 = \frac{(y - 2x)^3(y + x)^2 - (y - 2x)^2 x^3 + xy^4 - y^4 + x^4}{x^3}.$$

D'après un raisonnement déjà fait, pour x et y infinis, quand $\frac{y}{x}$ tend vers 2, le second membre se réduit au rapport des plus hautes puissances de x :

$$-\frac{8x^4}{x^3} = -8x.$$

La branche parabolique a pour position et pour amplitude celle de la parabole

$$(y - 2x)^2 = -8x.$$

Dans le cas général,

$$(y - ax)^p = \frac{R(x, y)}{\varphi_{m-p}(x, y)} = A x^{p-q} + \frac{k}{x^2};$$

la parabole asymptotique est ainsi déterminée.

Pratiquement, on considère seulement les termes de plus haut degré ne contenant pas $y - ax$ en facteur. On forme le rapport de ces termes au coefficient de $(y - ax)^p$; on cherche la valeur de ce rapport quand y est remplacé par ax, au numérateur ou au dénominateur, en ne conservant que les plus hautes puissances de x.

Cas de branches hyperboliques et paraboliques dans la même direction. — On cherche d'abord les

asymptotes des branches hyperboliques et la position de la courbe, comme il a été dit précédemment, sans s'occuper des branches paraboliques; connaissant la multiplicité du point à l'infini et le nombre des points restant comme contacts avec la droite à l'infini, on en conclut le genre des branches paraboliques à étudier, c'est-à-dire le type de la branche parabolique asymptotique à déterminer.

Reprenons l'exemple précédent, modifié comme nous l'avons dit, pour qu'il y ait une branche hyperbolique,

$$\begin{aligned} x^3(y-2x)^4 &- (y-2x)^3(y+x)^3 \\ &+ (y-2x)x^4 - xy^3 + y^4 + x^2 = 0, \end{aligned}$$

on étudierait, par les procédés employés pour les branches hyperboliques, la position par rapport à l'asymptote ordinaire

$$y - 2x = -8.$$

La droite à l'infini reste tangente double; il faut donc chercher une parabole asymptotique de la forme

$$(y-2x)^3 = \lambda x.$$

Posons $\lambda = A^3$ pour simplifier l'écriture :

$$y = 2x - Ax^{\frac{1}{3}}.$$

Il faut déterminer A pour que cette parabole rencontre la courbe en un point de plus à l'infini, en annulant le coefficient de la plus haute puissance de x dans l'équation aux x de rencontre.

Il est évident que ce coefficient ne pourra provenir que du premier terme $x^3(y-2x)^4$ et du terme $(y-2x)x^4$; dans le cas général, il est aisé de voir également le résultat de la substitution. Tout revient donc, dans la pratique, à considérer le groupe de termes

correspondant, soit ici

$$(y - 2x)^4 x^3 - (y - 2x)x^4 = 0,$$

ce qui donne la parabole asymptotique

$$(y - 2x)^3 + x = 0,$$

et permet de fixer la position de la courbe.

Le plus souvent, la simple inspection de l'équation permet de déterminer la parabole asymptotique, parce que l'étude des points sur la droite à l'infini donne exactement le type de la branche parabolique étudiée. Le procédé est particulièrement simple dans le cas où la direction asymptotique est Ox ou Oy.

[M²2e]

SUR UN THÉORÈME DE CHASLES ET D'ABEL;

Par M. H. LAURENT.

On connaît ce théorème de Chasles :

Si à une surface algébrique on mène des plans tangents parallèles à un plan donné P, *le centre des moyennes distances des points de contact reste fixe quand on fait varier le plan* P.

On sait que Chasles pensait que son théorème ne pourrait pas être démontré par l'analyse, on sait aussi que Liouville en a donné une démonstration analytique, mais en imaginant une nouvelle méthode d'élimination qui d'ailleurs est très intéressante en elle-même. Je me propose dans ce qui suit de donner une nouvelle démonstration du théorème de Chasles : 1° en

l'étendant à l'hyperespace ; 2° en montrant que, même dans l'espace à trois et à deux dimensions, il est encore susceptible d'être considérablement généralisé ; 3° en montrant qu'il n'est qu'un cas particulier du théorème d'Abel.

Les quelques lignes qui suivent sont extraites d'un travail sur la pangéométrie que je me propose de publier un jour quand les circonstances me le permettront.

Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ un polynome entier en $x_1, \ldots, x_n$.

Considérons la surface représentée par l'équation

$$f = 0 \tag{1}$$

dans l'espace à n dimensions, menons-lui les plans tangents parallèles au plan

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots + l_n x_n = 0,$$

les points de contact seront donnés par la formule (1) et les suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : l_1 = \frac{\partial f}{\partial x_2} : l_2 = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} : l_n. \tag{2}$$

Posons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} = f_{ij},$$

enfin, désignons par s les rapports (2), les équations (1) et (2) pourront être remplacées par les suivantes :

$$f = 0, \quad f_1 - s l_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_n - s l_n = 0. \tag{3}$$

Considérons les l comme des variables indépendantes et différentions ces équations, nous aurons :

$$\begin{aligned} &f_1 \, dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots + f_n \, dx_n = 0, \\ &f_{11} dx_1 + f_{12} dx_2 + \ldots + f x_n dx_n - l_1 ds - s dl_1 = 0. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où, en résolvant par rapport à dx, et en appelant D le déterminant,

$$\frac{\partial(f, f_1 - l_1 s, \ldots, f_n - l_n s)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n, s)},$$

l'on tire

$$(4) \qquad dx_1 = \frac{s}{D}\left[\frac{\partial D}{\partial f_{11}} dl_1 + \ldots + \frac{\partial D}{\partial f_{n1}} dl_n\right],$$

le degré de D par rapport à $s, x_1, \ldots, x_n$ est, en appelant m le degré de f,

$$m - 1 + (m - 2)n = mn + m - 2n - 1 = \delta;$$

le degré du facteur de $\frac{1}{D}$ dans le second membre est $\delta - (m - 1)$, donc, en vertu d'un théorème bien connu de Jacobi, si l'on ajoute toutes les équations analogues à (4) et relatives à toutes les solutions des équations (3), on aura

$$\Sigma dx_1 = 0, \quad \text{de même} \quad \Sigma dx_2 = 0, \quad \ldots.$$

On voit donc que le centre des moyennes distances des points de contact des plans parallèles au plan $l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n = 0$ ne dépend pas des coefficients $l_1, l_2, \ldots, l_n$. C'est le théorème de Chasles qui se présente comme un cas particulier du célèbre théorème d'Abel.

Il y a plus, ce théorème de Chasles peut être considérablement généralisé, même pour l'espace à deux ou trois dimensions, et, en effet, de ce que dans la formule (4) le coefficient de $\frac{1}{D}$ est de degré $\delta - (m - 1)$, il en résulte, non seulement que Σdx est nul, mais encore que $\Sigma H\, dx = 0$.

Pourvu que H soit un polynome dont le degré ϵ tel que

$$\delta - (m - 1) + \epsilon < \delta$$

ou que

$$c < m - 1$$

Si donc m est au moins égal à 3,

$$\begin{array}{llll} \Sigma x_1^2, & \Sigma x_2^2, & \Sigma x_3^2, & \ldots, \\ \Sigma x_1 x_2, & \Sigma x_1 x_3, & \Sigma x_2 x_3, & \ldots \end{array}$$

seront constants, c'est-à-dire indépendants de $l_1, l_2, \ldots,$ il en sera de même de

$$\Sigma(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

ce qui constitue autant de théorèmes de géométrie ; en particulier, on voit que :

Si l'on mène à une surface les plans parallèles à un plan donné, la somme des carrés des rayons recteurs des points de contact issus d'un point fixe sera constante quelle que soit l'orientation des plans tangents. (Ce théorème n'est pas vrai pour les surfaces du second degré.)

Si m est au moins égal à 4, $\Sigma x_1^3, \Sigma x_1^2 x_2, \ldots$ seront également indépendants des quantités $l_1, l_2, \ldots,$ mais ces théorèmes sont moins intéressants parce qu'ils sont moins susceptibles d'une interprétation géométrique.

Voici quelques énoncés de théorèmes qu'il serait peut-être difficile de démontrer par les procédés ordinaires de la géométrie :

1° Si l'on mène des plans tangents parallèles à une surface du troisième degré ou de degré supérieur, la somme des carrés des cordes qui joignent les points de contact deux à deux est indépendante de l'orientation de ces plans ;

2° Si l'on considère une surface et les points où le produit des rayons de courbure principaux a une valeur donnée, ainsi que l'angle de sa normale avec une droite fixe, le centre des moyennes distances de ces points aura une position indépendante de ces valeurs données.

3° Les mêmes choses étant posées, la somme des carrés des cordes joignant les points en question deux à deux sera constante.

4° Si l'on considère des surfaces de même degré en nombre $n - 1$ dans un espace à n dimensions et si on leur mène des plans tangents passant par un point donné P, le centre des moyennes distances des points de contact sur chaque surface restera fixe quand on fera varier le point P.

5° Si l'on considère une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

et les points où les deux paramètres

$$\Delta_1 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$
$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ont des valeurs données, le centre des moyennes distances de ces points ne variera pas quand on fera varier $\Delta_1 f$ et $\Delta_2 f$.

Le lecteur pourra inventer ainsi une foule de théorèmes, relatifs, par exemple, à des familles de courbes ou de surfaces. Ce qui précède suffit pour montrer tout le parti qu'on peut tirer de la méthode que nous venons d'indiquer.

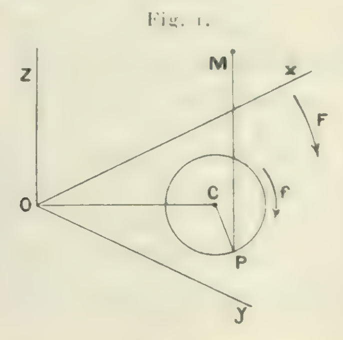
CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1906. COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On considère un système d'axes rectangulaires fixes, Ox, Oy, Oz, *et, dans le plan* xOy, *un cercle* (C) *de rayon* $\frac{1-m}{2}a$ *animé d'un mouvement de translation, dans lequel son centre* C *décrit dans le sens de la flèche* F, *et avec une vitesse angulaire* $(1-m)\omega$, *un cercle de centre* O *et de rayon* $\frac{1+m}{2}a$.

En même temps que ce cercle (C) *se déplace, un point* P *est mobile sur sa circonférence, et la parcourt dans le sens de la flèche* f, *avec la vitesse angulaire* $(1+m)\omega$. *Il décrit ainsi une courbe* (E) (*Épicycloïde*).

Fig. 1.



Les quantités a, ω, m *sont trois constantes positives, dont la dernière est moindre que l'unité.*

I. *On demande d'exprimer en fonction du temps*

t, les coordonnées x, y du point P, sachant qu'à l'époque $t = 0$ les points C et P sont tous deux sur la partie positive de Ox, P à la distance a du point C.

II. *Le point P est la projection d'un point M, mobile dans l'espace : on demande d'exprimer sa cote z en fonction du temps t, sachant qu'elle est nulle à l'époque $t = 0$, et que la vitesse v de M fait avec l'axe Oz un angle constant θ quelconque d'ailleurs.*

On montrera que la trajectoire (K) du point M s'obtient en coupant le cylindre dont (E) est la section droite par un ellipsoïde de révolution autour de Oz : $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, où la longueur b varie avec θ.

On introduira, au lieu de θ, la constante b dans la représentation de la cote z du point M.

III. *Calculer la grandeur et les cosinus directeurs α, β, γ de la vitesse v du point M, ainsi que l'arc de la courbe (K) parcouru par ce mobile pendant le temps t. Exprimer, en fonction du temps, le rayon de courbure R de la courbe (K), et vérifier que la vitesse lui est proportionnelle.*

IV. *Après avoir formé l'équation du plan osculateur de la courbe (K), on démontrera que, à une époque t, tous ceux de ces plans qui correspondent aux diverses courbes (K) qu'on obtient en faisant varier b, passent par une même droite Δ du plan xOy.*

V. *Montrer que, lorsque t varie, cette droite Δ enveloppe une épicycloïde (E') homothétique à celle que décrit le point P diamétralement opposé au*

point P dans le cercle (C). — Faire voir que la courbe (E') a pour développée l'épicycloïde (E).

I. Au bout du temps t, les coordonnées du centre C, rapporté aux axes fixes Ox et Oy, sont :

$$\frac{(1+m)a}{2}\cos(1-m)\omega t \quad \text{et} \quad \frac{(1+m)a}{2}\sin(1-m)\omega t,$$

celles du point P, rapporté aux axes menés par C parallèlement à Ox et Oy,

$$\frac{(1-m)a}{2}\cos(1+m)\omega t \quad \text{et} \quad \frac{(1-m)a}{2}\sin(1+m)\omega t.$$

Les coordonnées de P rapportées à Ox et Oy sont donc

$$(1)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}[(1+m)\cos(1-m)\omega t + (1-m)\cos(1+m)\omega t], \\ y = \dfrac{a}{2}[(1+m)\sin(1-m)\omega t + (1-m)\sin(1+m)\omega t], \end{cases}$$

qu'on peut encore écrire

$$(1\ bis)\quad \begin{cases} x = a(\cos\omega t\cos m\omega t + m\sin\omega t\sin m\omega t), \\ y = a(\sin\omega t\cos m\omega t - m\cos\omega t\sin m\omega t). \end{cases}$$

II. On tire immédiatement de là

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a(1-m^2)\omega\sin\omega t\cos m\omega t, \\ \dfrac{dy}{dt} = \quad a(1-m^2)\omega\cos\omega t\cos m\omega t, \end{cases}$$

et, par suite, pour la vitesse u du point P,

$$u = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = a(1-m^2)\omega\cos m\omega t.$$

Mais, puisque la vitesse du point M fait l'angle

constant θ avec MP, on a

(3) $$\frac{dz}{dt} = \frac{u}{\operatorname{tang}\theta} = \frac{a(1-m^2)\omega}{\operatorname{tang}\theta}\cos m\omega t,$$

et, par suite, en intégrant et tenant compte de ce que $z = 0$ pour $t = 0$,

(4) $$z = \frac{a(1-m^2)}{m\operatorname{tang}\theta}\sin m\omega t.$$

Or, des formules (1 *bis*), on tire immédiatement

(5) $$x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 m\omega t + m^2\sin^2 m\omega t).$$

Donc,

$$1 - \frac{x^2+y^2}{a^2} = (1-m^2)\sin^2 m\omega t = \frac{m^2\operatorname{tang}^2\theta}{a^2(1-m^2)}z^2,$$

et l'on voit que l'on a bien

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

si l'on pose [1]

(6) $$b = \frac{a\sqrt{1-m^2}}{m\operatorname{tang}\theta}.$$

Remplaçant $\operatorname{tang}\theta$ par sa valeur tirée de là dans (4), on a

(4 *bis*) $$z = b\sqrt{1-m^2}\sin m\omega t.$$

III. On a maintenant pour la vitesse v du point M

(7) $$v = \frac{1}{\cos\theta}\frac{dz}{dt} = \frac{a(1-m^2)\omega}{\sin\theta}\cos m\omega t$$

---

[1] Il est facile de voir que, si l'on pose $m = \cos\varphi$, φ est l'anomalie excentrique des points de rebroussement (points les plus hauts) de la ligne d'égale pente tracée par le point M sur l'ellipsoïde de révolution.

et pour ses cosinus directeurs

$$(8)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{v}\dfrac{dx}{dt} = \sin\theta\sin\omega t, \\ \beta = \dfrac{1}{v}\dfrac{dy}{dt} = \sin\theta\cos\omega t, \\ \gamma = \dfrac{1}{v}\dfrac{dz}{dt} = \cos\theta, \end{cases}$$

cette dernière expression fournissant une vérification [1].

Quant à l'arc de courbe, vu les conditions initiales, il est donné par

$$(9)\qquad s = \int_0^t v\,dt = \frac{a(1-m^2)}{m\sin\theta}\sin m\omega t.$$

Si maintenant α', β', γ' sont les cosinus directeurs de la normale principale, on a

$$\frac{v}{R}\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = -\omega\sin\theta\cos\omega t,$$

$$\frac{v}{R}\beta' = \frac{d\beta}{dt} = -\omega\sin\theta\sin\omega t,$$

$$\frac{v}{R}\gamma' = \frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

d'où, faisant la somme des carrés et tenant compte de ce que $\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 = 1$,

$$(10)\qquad \frac{v}{R} = \omega\sin\theta.$$

[1] Si, dans ces formules et dans les suivantes, on voulait introduire b au lieu de θ, il suffirait de remarquer que de (6), qui peut s'écrire $\tan\theta = \dfrac{a\sqrt{1-m^2}}{bm}$, on tire

$$\sin\theta = \frac{a\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{a^2(1-m^2)+b^2m^2}},\qquad \cos\theta = \frac{mb}{\sqrt{a^2(1-m^2)+b^2m^2}}.$$

et, en rapprochant de (7),

$$(11)\qquad R = \frac{a(1-m^2)}{\sin^2\theta}\cos m\omega t.$$

On a, en outre,

$$\alpha' = -\cos\omega t,\qquad \beta' = -\sin\omega t,\qquad \gamma' = 0.$$

IV. Le plan osculateur au point (x, y, z) a pour équation

$$AX + BY + CZ = Ax + By + Cz$$

avec (puisqu'il contient la tangente et la normale principale)

$$\frac{A}{\beta\gamma' - \gamma\beta'} = \frac{B}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \frac{C}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$

ou

$$\frac{A}{\cos\theta\sin\omega t} = \frac{B}{-\cos\theta\cos\omega t} = \frac{C}{\sin\theta},$$

ou encore

$$\frac{A}{\sin\omega t} = \frac{B}{-\cos\omega t} = \frac{C}{\tan\theta}.$$

Or, si l'on multiplie les formules (1 *bis*) respectivement par $\sin\omega t$ et $-\cos\omega t$, la formule (4) par $\tan\theta$, et si l'on additionne, on a

$$(12)\qquad x\sin\omega t - y\cos\omega t + z\tan\theta = \frac{a}{m}\sin m\omega t.$$

C'est donc là l'équation du plan osculateur, si l'on y regarde x, y, z comme des coordonnées courantes.

La trace Δ de ce plan sur le plan Oxy est

$$(13)\qquad x\sin\omega t - y\cos\omega t = \frac{a}{m}\sin m\omega t,$$

indépendante de θ, donc de h.

V. Pour avoir l'enveloppe de cette droite Δ, il faut éliminer t entre cette équation (13) et sa dérivée par

rapport à t, qui peut s'écrire

$$(14)\qquad x\cos\omega t + y\sin\omega t = a\cos m\omega t.$$

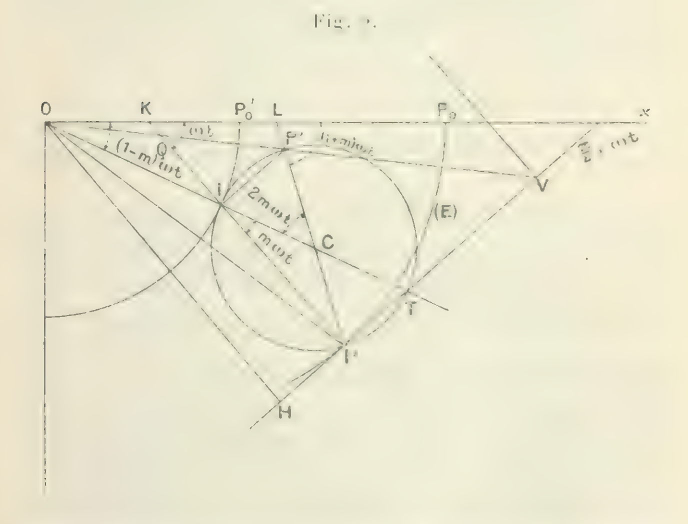
Au lieu d'éliminer t, on peut représenter cette enveloppe paramétriquement en tirant de là

$$x = \frac{a}{m}(\sin\omega t\sin m\omega t + m\cos\omega t\cos m\omega t),$$

$$y = \frac{a}{m}(-\cos\omega t\sin m\omega t + m\sin\omega t\cos m\omega t).$$

Or, pour avoir le lieu du point P′ diamétralement opposé à P dans le cercle (C), il faut dans les for-

Fig. 2.



mules (1 *bis*) remplacer ωt et $m\omega t$ par ces mêmes angles augmentés de $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne précisément les dernières formules écrites, à cette différence près que c'est a au lieu de $\frac{a}{m}$ qui figure en dehors de la parenthèse.

Donc l'enveloppe de Δ est une épicycloïde (E') homothétique de celle que décrit le point P par rapport à l'origine O, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{m}$.

Remarquons maintenant que la droite (13), qui passe par le point où Δ (13) touche son enveloppe, est perpendiculaire à cette droite : c'est donc la normale à (E'), et son enveloppe s'obtient en éliminant t entre (14) et sa dérivée par rapport à t

$$(15) \qquad x \sin\omega t - y \cos\omega t = am \sin m\omega t.$$

Or, on voit immédiatement que, si l'on tire x et y de (14) et (15), on retombe sur les formules (1 *bis*), ce qui montre que la développée de (E') se confond avec le lieu de P.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

I. La vitesse relative du point P [tangente au cercle (C)] et sa vitesse d'entraînement (équipollente à celle de C, par suite, perpendiculaire à OC) sont toutes deux égales à $\frac{(1-m^2)a\omega}{2}$. Leur résultante, vitesse absolue de P, est donc dirigée suivant la bissectrice PT de leur angle, T étant le point où le rayon OC prolongé rencontre le cercle (C). Par suite, la normale à la trajectoire (E) de P passe par le point I diamétralement opposé à T, et, comme ce point I est le même quel que soit le point P choisi sur (C), c'est le centre instantané de rotation du cercle sur lequel serait marqué le point P. Le lieu de ce centre I sur le plan du cercle (C) est ce cercle lui-même ; sur le plan fixe, c'est le cercle de rayon OI. Donc, le mouvement de P peut s'obtenir par roulement du premier de ces cercles sur

le second, et la courbe que décrit ce point est une épicycloïde (E).

On peut remarquer, en outre, que, d'après l'énoncé

$$\widehat{x\mathrm{OC}} = (1 - m)\omega t, \qquad \widehat{x\mathrm{LP}} = (1 + m)\omega t,$$

d'où l'on déduit

$$\widehat{\mathrm{ICP}'} = 2 m \omega t.$$

Et, comme

$$\mathrm{OI} = \mathrm{OC} - \mathrm{CP} = ma,$$

on vérifie immédiatement l'égalité des arcs $\mathrm{P}'_0\mathrm{I}$ et IP' donnés respectivement par

$$\text{arc}\,\mathrm{P}'_0\mathrm{I} = ma(1 - m)\omega t$$

et

$$\text{arc}\,\mathrm{IP}' = \frac{(1 - m)a}{2}\,2 m \omega t.$$

Remarquons encore que l'on a

$$\mathrm{OT} = \mathrm{OC} + \mathrm{CP} = a$$

et

$$\widehat{\mathrm{PIT}} = \frac{\widehat{\mathrm{ICP}'}}{2} = m \omega t;$$

d'où l'on déduit

$$\widehat{\mathrm{PK}x} = \widehat{x\mathrm{OC}} + \widehat{\mathrm{PIT}} = \omega t.$$

II. La vitesse absolue u du point P, dirigée suivant PT, fait avec la vitesse relative, dirigée suivant la tangente en P au cercle (C), un angle égal à PIT ou $m\omega t$. Et, puisque, comme nous venons de le voir, la vitesse d'entraînement est égale à la vitesse relative, c'est-à-dire à $\dfrac{a(1 - m^2)\omega}{2}$, nous avons

$$\begin{aligned} u^2 &= 2\,\frac{a^2(1 - m^2)^2\omega^2}{4}(1 + \cos 2 m \omega t) \\ &= a^2(1 - m^2)^2\omega^2 \cos^2 m \omega t. \end{aligned}$$

Or, la vitesse v du point M fait avec sa projection u un angle constant égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$; on a donc

$$v = \frac{a\omega(1-m^2)}{\sin\theta}\cos m\omega t.$$

C'est la formule (7) ci-dessus. Pour en déduire z, il suffit de remarquer que, le lieu du point M étant une hélice, on a

$$\frac{dz}{dt} = v\cos\theta;$$

d'où, par intégration, la formule (4). Pour faire voir que l'hélice en question se trouve sur l'ellipsoïde ci-dessus défini, il suffit donc d'établir directement la formule (5). Or, rien n'est plus simple; abaissons, en effet, de O la perpendiculaire OH sur PT; cette perpendiculaire fait avec OC un angle égal à PIC ou $m\omega t$, et l'on a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \mathrm{OP}^2 &= \overline{\mathrm{OH}}^2 + \overline{\mathrm{HP}}^2 \\ &= \overline{\mathrm{OT}}^2 \cos^2 m\omega t + \overline{\mathrm{OI}}^2 \sin^2 m\omega t \\ &= a^2\cos^2 m\omega t + m^2 a^2 \sin^2 m\omega t. \end{aligned}$$

C'est précisément la formule (5).

III. La formule (7) vient d'être obtenue. Il suffit de remarquer qu'en vertu d'une propriété connue de l'hélice, on a

$$s = \frac{z}{\cos\theta},$$

pour déduire de (4) la formule (9). Reste à obtenir les formules (8) et (10). Or, rien n'est plus aisé géométriquement. En effet, la projection PT du vecteur vitesse fait avec Ox un angle égal à $\frac{\pi}{2} + \omega t$, et, d'autre

part, ce vecteur fait lui-même avec Oz un angle égal à θ. On a donc

$$\alpha = \sin\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = -\sin\theta \sin\omega t,$$

$$\beta = \sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = \sin\theta \cos\omega t,$$

$$\gamma = \cos\theta.$$

Ce sont les formules (8). De plus, la considération de l'indicatrice sphérique (ici un cercle parallèle au plan Oxy) donne immédiatement pour l'angle de contingence $d\varepsilon$

$$d\varepsilon = \sin\theta \, d\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = \omega \sin\theta \, dt.$$

D'où

$$R = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\varepsilon}{dt}} = \frac{v}{\omega \sin\theta}.$$

C'est la formule (10).

IV. Le plan osculateur à l'hélice décrite par le point M contenant la normale principale, c'est-à-dire la normale au cylindre mené par (E) parallèlement à Oz, normale qui se projette sur Oxy suivant PK, a pour trace sur ce plan Oxy, la parallèle à PK (c'èst-à-dire la perpendiculaire à PT) menée par le point V où la tangente à l'hélice rencontre Oxy. Or, la sous-tangente PV étant égale à l'arc PP_0 de l'épicycloïde (E) décrite par P, est indépendante de l'angle θ de l'hélice, et, par suite, il en est de même de la trace du plan osculateur.

D'autre part, puisque le plan osculateur a pour caractéristique la tangente, la trace de ce plan osculateur touche son enveloppe au point V où elle est rencontrée par cette tangente. Ceci montre que VP est normale à cette enveloppe qui est, par suite, une développante de (E).

Reste à faire voir qu'elle est homothétique de l'épicycloïde décrite par le point P', par rapport au point O. Or, la sous-tangente PV est donnée par

$$PV = \rho \tang \theta$$

ou, en vertu de la formule (4), par

$$PV = \frac{a(1-m^2)}{m} \sin m\omega t.$$

On a donc

$$\begin{aligned} TV &= PV - PT \\ &= \frac{a(1-m^2)}{m} \sin m\omega t - a(1-m) \sin m\omega t \\ &= \frac{a(1-m)}{m} \sin m\omega t. \end{aligned}$$

Mais, d'autre part,

$$IP' = 2 IC \sin \frac{ICP'}{2} = a(1-m) \sin m\omega t.$$

Par suite,

$$\frac{TV}{IP'} = \frac{1}{m};$$

comme, d'ailleurs, TV et IP' sont parallèles (comme perpendiculaires à PI), et que l'on a aussi

$$\frac{OT}{OI} = \frac{1}{m},$$

on voit que les points P' et V sont en ligne droite avec le point O, et que l'on a

$$\frac{OV}{OP'} = \frac{1}{m},$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Remarque. — En vertu de la construction de Savary, ou mieux d'Euler, le point Q est le centre de courbure

de l'épicycloïde (E). Or, le triangle OP'C, coupé par la transversale PIQ, donne

$$\frac{QO}{QP'}\,\frac{PP'}{PC}\,\frac{IC}{IO} = 1;$$

d'où

$$\frac{OQ}{QP'} = \frac{PC}{PP'}\,\frac{OI}{IC} = \frac{1}{2}\,\frac{ma}{\frac{(1-m)a}{2}} = \frac{1-m}{m}$$

et

$$\frac{OQ}{OP'} = m.$$

Par suite, en vertu de la dernière égalité obtenue,

$$\frac{OQ}{OV} = m^2;$$

d'où ce théorème connu que la développante et la développée d'une épicycloïde sont homothétiques.

BIBLIOGRAPHIE.

Initiation mathématique. — Ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'Enfance, par *C.-H. Laisant*, 1 vol. in-12 de VIII-167 pages avec 97 figures. Prix : 2fr. Paris, Hachette et Cie.

Le petit volume que publie aujourd'hui M. Laisant a pour but de montrer comment on peut éveiller le goût des mathématiques chez les enfants même les plus jeunes. L'auteur avait soutenu la possibilité de cet éveil dans une conférence faite il y a plusieurs années, et des esprits non moins excellents que le sien partageaient sa manière de voir ; toutefois, l'enseignement restait ce qu'il était et l'on abordait (d'ailleurs, on aborde

toujours à la science par l'aspect le plus rébarbatif qui se puisse imaginer.

Voici le moyen d'intéresser les jeunes, même les tout petits, de leur faire voir combien il est facile de s'amuser, avec des bâtons, des allumettes, des billes, des haricots, des papiers découpés, voire une règle et un compas pour tracer des figures simples dont la symétrie sera pourtant bien remarquable et intéressante. S'il est vrai que Pascal a reproduit de lui-même, et seulement avec des données extrêmement vagues, les premières propositions de la géométrie, c'est probablement en agissant et réfléchissant ainsi, non en enchevêtrant des raisonnements aussi rigoureux qu'ennuyeux.

M. Laisant commence par une foule de petits exercices qui peuvent conduire à la connaissance de la numération. Il est bien entendu qu'il ne doit pas d'abord être question de ce mot. On fait des fagots d'allumettes, on met les fagots en bottes ou en boîtes. On se sert encore de jetons de couleurs différentes pour représenter les unités, les dizaines, les dizaines de dizaines, etc.... Les opérations arithmétiques s'exécutent dans les mêmes conditions, la table de multiplication nous apparaît dans toute sa simplicité, mais non sans que l'on puisse en voir bien des curieuses propriétés, par exemple, la possibilité de la former sans écrire de chiffres sur du papier assez finement quadrillé.

Dès que l'on a fait connaissance avec les chiffres proprement dits, M. Laisant ne paraît pas être d'avis que l'on fasse beaucoup d'opérations abstraites sous prétexte d'exercice. On peut en faire qui sont amusantes, où par exemple les chiffres du produit offrent une symétrie remarquable ou reproduisent à l'ordre près ceux du multiplicande.

On fera connaissance avec les nombres premiers, en construisant le crible d'Eratosthène. En découpant des gâteaux, on aura une première idée de la théorie des fractions.

Maintenant, nous devenons géomètre. Il faut entendre par là que nous tracerons des figures. Nous ne chercherons pas à étudier leurs propriétés, mais nous insisterons sur tout ce qui saute aux yeux. Cela nous permettra d'établir bien des points importants de la théorie des aires. Nous arriverons même à résoudre complètement le problème pour les polygones simples et nous démontrerons le théorème de Pythagore. Nous

pourrons assembler de petits carrés, voire deux petits cubes et cela permettra de faire connaissance avec les nombres triangulaires, la somme des carrés, des cubes, des premiers nombres entiers. Voici, dans le même ordre d'idées, le triangle arithmétique de Pascal et même des notions sur les progressions et les différents systèmes de numération. Il s'agit moins d'apprendre ces résultats que de s'intéresser à leur harmonie et M. Laisant intéresse non sans esprit, avec une bonhomie anecdotique.

Voici l'histoire des grains de blé réclamés par l'inventeur du jeu d'échecs, lesquels croissent en progression géométrique et sont tellement nombreux qu'il est impossible de satisfaire l'apparente modestie de l'inventeur. Une maison achetée dans des conditions analogues, ou un centime placé à intérêts composés pendant quelques siècles nous montrent des résultats quelque peu déconcertants et capables de piquer au vif la curiosité enfantine. Des gens cérémonieux peu satisfaits des places qu'ils occupent à table et désirant continuellement en changer nous conduisent à la considération des permutations.

Dans le domaine de la géométrie, nous nous amusons avec le compas, ce qui vaut bien un autre jouet. Nous construisons des cercles, des rosaces, des lunules. Nous construisons des graphiques et nous voyons clairement comment doivent se croiser des trains, des bateaux. Beaucoup de petites questions qui semblent créées tout exprès pour ne donner lieu qu'à des considérations arithmétiques obscures deviennent claires par la méthode graphique. Cela nous conduit même à entrevoir les méthodes de la géométrie analytique proprement dite.

Le petit volume se termine par l'étude d'un quadrillage intéressant dans lequel il semble qu'on puisse compter tantôt 64, tantôt 65 carrés. C'est un exemple de paradoxe. Voici aussi les carrés magiques.

De tout cet ensemble, il faut conclure qu'on peut intéresser sans fatiguer. Si, mis entre les mains des enfants, il ne peut forcer leur attention, il sera du moins une ressource précieuse pour l'éducateur habile jusqu'au moment où l'enfant lui-même devenu un peu plus âgé reverra avec plaisir les premières harmonies mathématiques présentées à son intelligence en éveil. A. BUHL (Montpellier).

CORRESPONDANCE.

M. V. Jamet. — A propos de mon article sur la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, publié dans les *Nouvelles Annales* au mois de janvier, je m'aperçois que le calcul final peut être simplifié comme il suit : sachant que les deux nombres

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}, \qquad \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$$

comprennent entre eux le nombre e, chaque fois que m est un entier positif, la transformation

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m$$
$$= \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} + \frac{1}{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$$

montre que leur différence tend vers zéro, quand m est de plus en plus grand. D'où la conclusion du paragraphe final.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2020.

(1905, p. [illegible])

On considère tous les triangles MPQ *inscrits dans un cercle et tels que* MP *et* MQ *aient des directions données. Le lieu des centres des cercles tritangents aux triangles* MPQ *se compose de quatre cercles.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Abramescu.

Soient I, I', I'', I''' les centres des cercles inscrit et exinscrit

correspondants aux sommets M, P, Q. On remarque que l'angle

$$\mathrm{PMQ} = \text{const.},$$

et que les milieux des arcs MP, MQ sont des points fixes A, B. De même

$$\widehat{\mathrm{PIQ}} = \frac{\mathrm{PMQ}}{2} + 90^{\circ} = \text{const.},$$

donc le point I décrit un segment de cercle C décrit sur AB et capable d'un angle constant.

De même, on a

$$\mathrm{IA} = \mathrm{I''A}, \qquad \mathrm{IB} = \mathrm{I'''B},$$

donc les lieux des points I″ et I‴ s'obtiendront en prenant sur la sécante AI une longueur $\mathrm{I''A} = \mathrm{IA}$; comme A et B sont fixes, les lieux des points I″ et I‴ seront des cercles égaux au cercle C et tangents à C aux points A et B respectivement.

Désignant par D le point où II′ coupe le cercle PMQ, on a

$$\mathrm{ID} = \mathrm{DI'}.$$

Ainsi, le lieu de I′ s'obtient en menant une sécante de direction donnée, perpendiculaire à AB (la bissectrice de PMQ restant parallèle à elle-même), et coupant deux cercles C et PMQ en des points I et D, et l'on prend extérieurement

$$\mathrm{DI'} = \mathrm{DI}.$$

Donc, le lieu de I′ est un cercle ayant son centre sur la ligne des centres des cercles PMQ et C.

Autre solution par M. G. Painvin.

2024.

(1905, p. 528.)

Soient C une cubique gauche, aa', bb', cc' trois cercles de cette courbe, génératrices d'une quadrique qui la contient tout entière.

Démontrer que les quatre plans (abc), $(ab'c')$, $(a'bc')$, $(a'b'c)$ passent par un même point d. De même les quatre

plans $(a'b'c')$, $(a'bc)$, $(ab'c)$, (abc') *passent par un même point* d'. *La droite* dd' *est une corde de la cubique* C, *et les points* d *et* d' *sont conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de cette corde.* (R. BRICARD.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Je m'appuierai sur le lemme suivant :

Soient, sur une courbe unicursale G, (a, a') *et* (b, b') *deux couples de points : ils déterminent sur* G *une involution dont les points doubles sont* α, β. *Je dis que* (a, b), (a', b'), (α, β) *sont trois couples de points conjugués dans une certaine involution déterminée sur* G.

On peut évidemment supposer que G est une conique. Il résulte alors de l'hypothèse que aa' et bb' vont concourir au pôle de $\alpha\beta$ par rapport à G; ab, $a'b'$ vont donc, en vertu d'un théorème bien connu, concourir sur $\alpha\beta$, ce qui démontre la proposition.

Cela posé, les couples de points (a, a'), (b, b'), (c, c') de l'énoncé sont conjugués dans une involution déterminée sur C, et dont je désignerai les points doubles par α, β. En vertu du lemme précédent, (a, b), (a', b') et (α, β) sont trois couples de points conjugués dans une nouvelle involution. Autrement dit ab, $a'b'$ et $\alpha\beta$ sont trois génératrices, d'un même système, d'une quadrique (Q) que contient C.

Considérons la génératrice du second système de (Q) qui passe par le point c : elle rencontre ab, $a'b'$ et $\alpha\beta$. Cela revient à dire que les plans (abc) et $(a'b'c)$ passent par un même point d de $\alpha\beta$. On voit de même que les plans $(ab'c')$ et $(a'bc')$ passent par le point d.

On reconnaîtra de la même façon l'existence du point d'.

Les plans (abc), (abc'), $(ab\alpha)$, $(ab\beta)$ forment un faisceau harmonique, puisqu'ils sont déterminés par une même corde de C et par quatre points c, c', α, β qui forment une division harmonique sur cette courbe. Il en est de même, par conséquent, des points d, d', α et β, où ces plans rencontrent respectivement la droite $\alpha\beta$. La dernière partie de l'énoncé se trouve ainsi établie.

[L²1b]

CONSTRUCTION DE LA SURFACE DU SECOND ORDRE DÉTERMINÉE PAR NEUF POINTS OU NEUF PLANS TANGENTS ;

PAR M. CH. MÉRAY,

Ancien professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

1. En 1854, dans un travail d'écolier que l'hospitalité des *Nouvelles Annales* a honoré, j'ai ébauché, pour toutes les coniques, l'emploi des merveilleuses méthodes dont le *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles venait de faire connaître le principe et l'application au cercle, dont son *Traité des sections coniques* devait donner en 1865 le développement magistral.

En 1860 (*Annali di Matematica pura ed applicata,* t. III) j'avais poussé un peu plus loin, en indiquant des moyens tout semblables pour l'édification de la théorie géométrique des surfaces du second ordre. L'esprit de la méthode consiste à transférer simplement le rôle joué, pour une conique, par une paire de divisions, ou de faisceaux homographiques, dans un même plan, à un système de deux figures corrélatives *sur des plans de l'espace,* ou de deux *faisceaux corrélatifs,* familles de droites et de plans, issus respectivement de deux points fixes, dont les éléments se correspondent de manière à tracer, sur des plans quelconques, ceux de deux figures corrélatives.

2. J'ai été conduit ainsi à prendre, pour point de départ, deux théorèmes qui sont fondamentaux dans cette théorie :

I. *Le lieu de l'intersection m d'une droite M' et d'un plan* $\mathfrak{M}''$, *homologues dans deux faisceaux corrélatifs, de centres o', o'', est une surface du second ordre qui passe par ces deux points, y ayant pour plans tangents les homologues* $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$ *de la droite o'o'' rattachée successivement au second faisceau, puis au premier. Et réciproquement, sauf à choisir convenablement les faisceaux.*

II. *L'enveloppe du plan* $\mathfrak{M}$ *déterminé par un point m' et une droite M'', homologues dans deux figures corrélatives sur des plans fixes* $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$, *est aussi une surface du second ordre, maintenant tangente à ces plans, en o', o'', points homologues dans les deux figures respectivement, de la trace mutuelle des mêmes plans, rattachée successivement à l'une et à l'autre. Et réciproquement, sous restriction analogue.*

Ces propositions sont comme identifiées par le *Principe de dualité*, qu'il soit employé à faire la démonstration de l'une par le retournement détaillé des moyens propres à l'autre, ou bien à déduire l'une, *en bloc*, de l'autre préalablement établie, sans parler de voies différentes, qui ne sont ni détournées, ni difficiles. Mais, c'est sur la première, que l'attention se fixe exclusivement, cela pour la même cause qui nous fait concevoir une ligne ou surface par ses *points*, infiniment plus volontiers que par ses *tangentes* ou *plans tangents*.

3. La première partie de ce théorème I est très facile à établir, mais non la réciproque revenant à l'allégation que : *neuf points arbitrairement donnés ap-*

partiennent toujours à quelque lieu, de la nature spécifiée dans l'affirmation directe.

L'existence d'un tel lieu est liée à celle de quelque solution pour le problème :

I. *En nommant o', o'' deux des points donnés et $a_1, \ldots, a_7$ les sept autres, trouver deux faisceaux corrélatifs, de centres o', o'', où les rayons $o'a_1, \ldots, o'a_7$ du premier aient pour homologues dans le second, des plans issus respectivement des droites $o''o_1$, $o''o_2, \ldots, o''a_7$:*

II. *En prenant les traces $a'_1, \ldots, a'_7$ et $a''_1, \ldots, a''_7$, sur deux plans fixes $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$, de ces deux groupes de sept droites respectivement, construire dans ces plans, des figures corrélatives où les points $a'_1, \ldots, a'_7$ de l'une aient, pour homologues, des droites passant par $a''_1, \ldots, a''_7$ dans l'autre.*

Dans mon Mémoire de 1860 précité, j'ai réussi à résoudre le dernier par un expédient imité de l'artifice qui venait de fournir à M. Chasles sa construction de la surface du second ordre passant par neuf points (*Comptes rendus*, t. XLI, p. 1103). Mais, ramené dernièrement à cette question par un hasard, j'ai aperçu la solution directe exposée ci-après.

4. Pour pouvoir remplir pleinement leur rôle dans la théorie des surfaces du second ordre (pour des motifs d'ordre général encore), les figures corrélatives demandent, dans leur définition, quelques modifications et élargissements. A mes yeux, deux figures (planes) seront corrélatives dans l'un ou l'autre des deux cas suivants :

I. Ou bien elles sont composées de *points* m', ..., m'', ... respectivement *associés* par la condition, pour leurs coordonnées $(x'\,y'\,z')$, ..., $(x''\,y''\,z'')$, ... (rectilignes homogènes, ou trilinéaires), de satisfaire à une équation de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &c_{11}x'x'' + c_{22}y'y'' + c_{33}z'z'' + c_{23}y'z'' \\ &+ c_{32}z'y'' + c_{31}z'x'' + c_{13}x'z'' + c_{12}x'y'' + c_{21}y'x'' = 0, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire linéaire par rapport aux coordonnées de m' et aussi à celle de m'', les lettres c_{11}, ... représentant des constantes.

Chaque même point m' d'une figure a ainsi, dans l'autre, une infinité d'associés m'', dont le lieu est une droite M″, du moins en général, et ces objets m', M″ sont dits *homologues* l'un à l'autre.

1° Quand le déterminant de l'abaque des coefficients

$$(2)\quad \left\{\begin{matrix} c_{11}, & c_{21}, & c_{31}, \\ c_{12}, & c_{22}, & c_{32}, \\ c_{13}, & c_{23}, & c_{33} \end{matrix}\right.$$

n'est pas nul, on reste dans la conception habituelle des figures corrélatives (celle qui est connexe au *Principe de dualité*) : tout point, toute droite d'une figure ont, dans l'autre, une *seule* droite, un *seul* point pour homologues ; à un groupe de points en ligne droite ou de droites concourantes, correspondent toujours un faisceau de droites concourantes ou une division rectiligne de points, avec homographie mutuelle dans les deux cas ; etc.

2° La nullité du même déterminant sans celle de la totalité de ses mineurs d'ordre 2, assure à l'équation (1)

la possibilité d'être écrite

$$\mathfrak{P}'_1 \mathfrak{P}''_1 + \mathfrak{P}'_2 \mathfrak{P}''_2 = 0,$$

où $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$ composent une paire réduite de formes linéaires en x', y', z', et de même pour $\mathfrak{P}''_1$, $\mathfrak{P}''_2$ relativement à x'', y'', z''.

Cette circonstance imprime au système des figures un premier degré de dégénérescence. Dans chacune se trouve un point-*pivot* unique, dont les associés dans l'autre figure sont absolument indéterminés ; les droites joignant aux pivots deux points associés quelconques composent deux faisceaux homographiques, chacune d'elles étant l'homologue unique d'un point quelconque de l'autre ; ....

3° Celle de tous les mineurs précités, mais non de la totalité des éléments de l'abaque (2) permet, pour l'équation (1), cette autre écriture

$$\mathfrak{P}' \mathfrak{P}'' = 0,$$

où $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ sont des formes linéaires non identiquement nulles, en x', y', z' et x'', y'', z'', et provoque, dans le système des figures, une dégénérescence plus profonde. Chacune possède une droite-*thalweg* dont tout point a ses associés en complète indétermination dans l'autre figure ; tout point étranger à une thalweg a pour associés ceux seulement de la thalweg de l'autre figure ; ....

II. Ou bien les figures sont formées de *droites* M', ..., M'', ..., pareillement *associées* par la condition pour leurs *coordonnées* (X', Y', Z'), ..., (X'', Y'', Z''), ... (coefficients de x, y, z dans leurs équations), de satisfaire à une équation bilinéaire ana-

logue à (1)

$$C_{11}X'X'' + \ldots = 0.$$

Chaque même droite M' d'une figure a, dans l'autre, une infinité d'associées ayant en général une enveloppe qui se réduit à un point m'', et M', m'' sont dits encore *homologues*.

Les trois hypothèses faites successivement sur l'abaque (2) se représentent textuellement pour celui des coefficients de cette équation, avec des conséquences analogues.

1° La correspondance entre les objets M', m'' est la même qu'entre M', m', tout à l'heure (I, 1°), et la conception habituelle des figures corrélatives se retrouve au bout d'une autre voie.

2° Dans chaque figure, une droite-*piste* unique a ses associées absolument indéterminées; les traces marquées sur les pistes par deux droites associées quelconques y forment deux divisions homographiques, chaque trace étant le point homologue unique à une droite quelconque issue de l'autre; ....

3° Un point-*stigmate*, unique dans chaque figure, rend absolument indéterminées les associées de toute droite passant par lui; toute droite ne passant pas par un stigmate a pour associées toutes celles qui rayonnent de l'autre, indistinctement; ....

III. En résumé, dans les premiers cas des deux définitions, leur dissemblance laisse néanmoins la même nature générale aux systèmes de figures qui en dérivent. Dans les deux derniers, c'est le contraire, les figures particularisées par l'un d'eux échappant toujours à l'autre définition ([1]).

([1]) L'extension aux figures homographiques, de la notion des ob-

5. L'allusion faite aux figures corrélatives, dans l'énoncé II du n° 3, vise exclusivement celles qui dérivent de la première des deux définitions précédentes (4, I), et dont j'aurai ainsi à mentionner quelques propriétés successivement. Je ne le ferai qu'*en thèse générale* et *en gros*, pour ne pas franchir le cadre naturel de cette notice par les discussions minutieuses qu'exigeraient une précision et une rigueur absolues.

I. *Dans de telles figures $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, les points m' d'une droite fixe D' de l'une et ceux de leurs associés, m'', qui sont situés sur une droite E'' de l'autre, forment deux divisions homographiques.*

Car x', y', z' sont alors fonctions linéaires et homogènes de *deux* indéterminées seulement, dont x'', y'', z'' dépendent de la même manière, en vertu de l'équation (1) et de celle de la droite E''.

II. *Leur système est déterminé par la connaissance de huit paires de points associés.*

Car la substitution, dans l'équation (1), des coordonnées des points de ces huit paires, fournit, entre les *neuf* coefficients (2), *huit* conditions linéaires et ho-

---

jets *associés*, permettrait de lier très étroitement leur théorie à celle des figures corrélatives, d'unifier complètement toutes deux : les considérations analytiques propres à l'une et à l'autre mettraient en jeu les *mêmes formules* impliquant les *mêmes lettres*, celles-ci, toutefois, représentant les coordonnées, tantôt de points, tantôt de droites (tantôt de plans dans l'espace). Dans deux figures homographiques planes, l'*association* s'établit non plus entre point et point, ou droite et droite, comme dans les figures corrélatives, *mais entre point et droite toujours, l'associée* d'un point étant toute droite issue de son homologue, *l'associé* d'une droite, tout point situé sur son homologue.

mogènes, d'où, par suite, ceux-ci peuvent être tirés en fonctions linéaires et homogènes d'*une seule* indéterminée λ.

III. *Il est laissé indéterminé par la connaissance de sept paires seulement de points associés, cette condition assignant à une même figure, $\mathfrak{F}'$ par exemple, une infinité de corrélatives possibles $^{(1)}\mathfrak{F}''$, $^{(2)}\mathfrak{F}''$, ...* **Mais, dans toutes celles-ci, un même** *point m'' demeure associé commun à tout même point m' de $\mathfrak{F}'$, et il y a homographie entre tous les faisceaux $(^{(1)}M''$, $^{(2)}M''$, ...), $(^{(1)}N''$, $^{(2)}N''$, ...), ...* **formés ainsi autour de m'', n'', ... par les droites homologues des divers points, m', n', ..., de $\mathfrak{F}'$.**

Car les équations de condition entre les *neuf* coefficients du système ne sont maintenant qu'au nombre de *sept*, et ne fournissent plus leurs valeurs qu'en fonctions linéaires et homogènes de *deux* indéterminées λ, μ. De quoi les faits en question se déduisent bien facilement.

6. Le cas où les figures considérées sont dans un même plan $\mathfrak{P}$ comporte une particularité spéciale, à propos de laquelle il faut noter quelques observations.

I. *Sur ce plan commun il y a des points doubles, c'est-à-dire dont chacun se confond avec un de ses associés, situé ainsi sur sa droite homologue; et le* **lieu $\mathfrak{S}$, de tels points, est une conique.**

Car alors, on peut prendre identiques les repères coordonnés, auxquels les points associés m', m'' sont rapportés, et les substitutions $x' = x'' = x$, $y' = y'' = y$,

$z' = z'' = z$, faites dans l'équation (1), donnent :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 \\ & + (c_{23} + c_{32})yz + (c_{31} + c_{13})zx + (c_{12} + c_{21})xy = 0, \end{aligned} \right.$$

pour équation du lieu $\mathfrak{C}$.

II. *Pour les systèmes* $^1\Sigma$, $^2\Sigma$, ... *de figures admettant sept mêmes paires de points associés* (5, III), *les coniques* $^1\mathfrak{C}$, $^2\mathfrak{C}$, ... *passent par quatre mêmes points fixes, et leur faisceau est homographique à ceux de droite, mentionnés au lieu cité.*

Car les coefficients de l'équation (3) sont alors, comme ceux de l'abaque (2) (*loc. cit.*), des fonctions linéaires et homogènes des deux mêmes indéterminées λ, μ.

III. Deux points associés m', m'' seront dits tels *relativement à un point neutre donné* ω, s'ils se trouvent en ligne droite avec lui. D'après cela, *tout point double est associé à lui-même, relativement à un point quelconque du plan commun des figures, considéré comme neutre.*

Quand, pour les sept paires considérées ci-dessus (II), *l'association est relative à un même point neutre* ω, *cette disposition s'étend à toutes les autres paires de points qui sont associés à la fois dans les divers systèmes* $^{(1)}\Sigma$, $^{(2)}\Sigma$, ...(*loc. cit.*), *et une même conique* $\mathfrak{C}$ *est engendrée par les points doubles d'un quelconque de ces systèmes.*

1° Les points m', n', ... d'une figure $\mathfrak{F}'$, et d'autres m'', n'', ... pris *en indétermination absolue* sur les droites $\omega m'$, $\omega n'$, ... respectivement, sont visiblement associés dans un système Σ dont les figures $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$ sont douées de pivots confondus avec ω (4, I, 2°). Cela

posé, soient ⁽¹⁾$\mathfrak{F}''$ la figure corrélative à $\mathfrak{F}'$ dans le système ⁽¹⁾Σ par exemple, puis ⁽¹⁾m'', ⁽¹⁾n'', ... ceux de ses points qui sont associés à m', n', ... relativement à ω, c'est-à-dire les traces des droites $\omega m'$, $\omega n'$, ... sur les droites homologues de m', n', ... Les points des paires (m', ⁽¹⁾m''), (n', ⁽¹⁾n''), ... étant ainsi associés dans deux des systèmes ⁽¹⁾Σ, ⁽²⁾Σ, ..., savoir Σ figurant parmi eux et ⁽¹⁾Σ, ils le sont dans tous les autres (5, III), ce qui équivaut à la première partie de l'énoncé.

2° Si enfin ⁽¹⁾m désigne un point quelconque de la conique ⁽¹⁾$\mathfrak{C}$ appartenant au système ⁽¹⁾Σ, il est associé à lui-même dans ce système, et encore dans le système spécial Σ puisqu'il appartient à la droite ω ⁽¹⁾m (1°). Il l'est donc aussi, double en conséquence, dans chacun des autres systèmes ⁽²⁾Σ, ⁽³⁾Σ, ..., ceci étant le fait formulé par la dernière partie de l'énoncé.

7. Sur les systèmes de deux figures corrélatives $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$ *situées dans un même plan* $\mathfrak{P}$, nous pouvons maintenant résoudre les problèmes posés successivement ci-après.

I. *Dans tous les systèmes où trois paires de points associés,* (a'_1, a''_1), (a'_2, a''_2), (a'_3, a''_3), *sont données sur une même droite* Λ, *on demande l'associé commun* m'' *d'un point* m' *de la première figure par exemple, marqué arbitrairement sur cette droite.*

Les données laissent le système dans une indétermination bien plus étendue que celle dont nous avons parlé au n° 5, III, mais n'en déterminent pas moins ce point m''. Car il est évidemment l'homologue de m' dans la seconde des divisions homographiques définies, sur la même droite Λ, par la correspondance des

points a'_1, a'_2, a'_3 à a''_1, a_2, a_3 respectivement (*Ib.*, I).

II. *Dans tous les systèmes où sont données une conique* $\mathfrak{C}$ *comme lieu des points doubles et deux paires de points associés* (a'_1, a_1), (a_2, a'_2), *dont les droites sont distinctes, on demande l'associé* m'' *d'un point quelconque* m' *du plan* $\mathfrak{L}$, *attaché à la première figure par exemple.*

Ici, sept paires de points associés sont donnés, savoir deux explicitement, cinq implicitement par le dédoublement d'autant de points déterminant la conique $\mathfrak{C}$, et leurs associations sont toutes relatives à l'intersection ω des droites $a'_1 a_1$, $a_2 a'_2$. En conséquence, on se trouve dans le cas particulier (6, III) de l'indétermination mentionnée au n° 5, III.

Nommons e, f et g, h les points doubles, tracés, sur la conique $\mathfrak{C}$, par les droites $a'_1 a''_1$ et $a_2 a'_2$. Le point ω''_1 qui, sur $a'_1 a''_1$, s'associe à ω rattaché à la première figure, dans tous les systèmes constructibles sur les données (a'_1, a''_1), (e, e), (f, f) (1), lui est associé en particulier dans tous ceux que nous considérons. Et de même, pour ω_2, associé à ω sur la droite $a'_2 a'_2$, dans tous les systèmes dérivant de (a'_2, a_2), (g, g), (f, f) prises maintenant pour données. La droite Ω'' qui joint ces deux points est donc homologue à ω dans tous les systèmes considérés, puisqu'elle contient deux de ses associés communs dans tous ces systèmes (4, I).

Si maintenant, sur la droite $\omega m'$, on prend les traces ω'' et i, j de cette homologue Ω'' et de la conique $\mathfrak{C}$, puis les divisions homographiques où ω, i, j correspondent à ω', i, j, le point cherché m'' sera visiblement l'homologue, dans la seconde division, de m' rattaché à la première ; car ω, i, j sont respectivement associés à ω'', i, j, sur une même droite $\omega m'$ (5, I).

III. *Construire le système des figures $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, connaissant la conique $\mathfrak{S}$ lieu de ses points doubles, et trois paires de points associés, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, dont les droites ne passent pas par un même point.* Ceci équivaut à la connaissance de huit paires de points associés (*Cf.* II), détermine le système, en conséquence (5. II).

Soient m' un point quelconque du plan $\mathfrak{P}$, que nous rattacherons à la première figure pour fixer les idées, puis m_1, m_2, m_3 ses associés communs dans les trois familles de systèmes, dérivant de la conique $\mathfrak{S}$ combinée successivement avec les trois couples de paires $\mathfrak{p}_2$ et $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_3$ et $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ (II). Chacun de ces trois points étant évidemment associé à m' dans le système déterminé par *la totalité* des données, tous se trouvent sur la droite homologue M″ de m' dans ce système, et la déterminent (même surabondamment); puis, de même, pour les autres points n', ... de $\mathfrak{F}'$. Or ce système est précisément celui qui était à construire.

IV. *On donne quatre points doubles, trois paires de points associés, soit sept semblables paires au total* (*Cf.* II, III), *et, dans toutes les figures $\mathfrak{F}''$, on demande l'associé commun m'', d'un point quelconque m' de $\mathfrak{F}'$* (5, III).

Parmi les coniques qui passent par les quatre points doubles donnés, nommons $^{(1)}\mathfrak{S}$, $^{(2)}\mathfrak{S}$, $^{(3)}\mathfrak{S}$ les trois consistant en paires de droites, puis $^{(1)}$M″, $^{(2)}$M″, $^{(3)}$M″ les droites homologues à m' dans les systèmes déterminés par les paires de points associés données, combinées successivement avec les trois coniques (III). Comme le point cherché m'' se trouve visiblement sur chacune de ces trois homologues, celles-ci passent

toutes par lui, le déterminent en conséquence, même surabondamment.

On remarquera que *cette solution comporte exclusivement des tracés de droites.*

8. La résolution du problème précédent (7, IV) nous permet de passer *au cas où sont distincts les plans* $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, *des figures corrélatives à construire*, ce, à l'aide du lemme suivant dont la démonstration est assez visible pour être omise :

Deux figures respectivement homographiques à deux autres, qui sont mutuellement corrélatives, le sont aussi entre elles.

I. *Dans tous les systèmes où sont données sept mêmes paires de points associés* $(a'_1, a''_1), \ldots, (a'_7, a''_7)$, *on demande l'associé commun* m'' *d'un point quelconque* m' *de la première figure* (5, III).

Ayant marqué arbitrairement sur un plan auxiliaire Π, quatre points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (sous la condition toutefois que trois quelconques d'entre eux ne soient pas en ligne droite), nous y construirons les homologues $\alpha'_5, \alpha'_6, \alpha'_7, \mu'$, des points a'_5, a'_6, a'_7, m', dans la seconde des deux figures homographiques (planes) déterminées par la correspondance de a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ respectivement, puis les homologues $\alpha''_5, \alpha''_6, \alpha''_7$, de a''_5, a''_6, a''_7, dans la seconde des figures homographiques déterminées par la correspondance de $a''_1, a''_2, a''_3, a''_4$ maintenant à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ encore, puis l'associé commun μ'' de μ' dans tous les systèmes de figures corrélatives, sur le même plan Π, qui ont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ pour points doubles avec (α'_5, α''_5), (α'_6, α''_6), (α'_7, α''_7) pour autres paires données de points associés (7, IV),

finalement, l'homologue m'' de φ'', dans la première figure du dernier des systèmes homographiques qui viennent d'être définis. Ce point m'' sera visiblement celui qui était demandé.

II. *Construire les figures $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, connaissant huit paires de points associés* (5, II).

Si $^{1}m''$, puis $^{2}m''$ sont les associés communs d'un point quelconque m' de la première, dans tous les systèmes constructibles sur sept seulement des paires données, puis sur quelque autre combinaison des mêmes paires prises en nombre égal (I), la droite $(^{1}m''\,^{2}m'')$ est visiblement l'homologue M'' de m'.

III. Avec un peu d'attention, on apercevra que l'intervention du plan auxiliaire Π peut être évitée par des tracés *exécutés sur les plans* $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ *seulement*. Et, comme celle du n° 7, IV, qui en a fourni la base, *ces constructions ne comportent que l'emploi de la règle.*

9. Le problème I ci-dessus (8) est précisément celui qui a été posé au n° 3, II, et qui se trouve maintenant résolu, lui-même et le précédent (*Ib.*, I).

D'après une constatation générale faite antérieurement (5, III), *le système des faisceaux corrélatifs de centres o', o'', dont les éléments homologues donnent, par leurs intersections, les divers points m, ... d'une surface du second ordre passant par ces centres, n'est pas entièrement déterminé; mais, dans toutes ses réalisations possibles, deux mêmes rayons $o'm$ et $o'n$ pris arbitrairement dans le premier faisceau, par exemple, ont pour homologues des plans* $^{(1)}\mathfrak{M}''$, $^{(2)}\mathfrak{M}''$, $^{(3)}\mathfrak{M}''$, ... *et* $^{(1)}\mathfrak{N}''$, $^{(2)}\mathfrak{N}''$, $^{(3)}\mathfrak{N}''$, ...,

rayonnant des droites o''m et o''n en deux faisceaux mutuellement homographiques.

Sur un même plan sécant $\mathfrak{P}$, ces systèmes auraient pour traces des systèmes de figures corrélatives, indéterminées aussi, mais où *tout point m' d'une figure aurait dans l'autre un associé commun m'' relativement à la trace ω de la droite des centres o', o''*, dont une même conique serait *le lieu commun des points doubles*. Cette conique est précisément la trace de la surface sur le plan sécant.

10. Pour une surface du second ordre, *considérée comme enveloppe de ses plans tangents* (2, II), on construira le pendant exact de tout ce qui précède, en en retournant les détails dans le sens indiqué par le *Principe de dualité*, après adoption, pour deux figures corrélatives planes, de la définition II du n° 4.

Quand il s'agit de figures corrélatives sur un même plan, la relativité à un point neutre ω, de l'association de deux points *m'*, *m''* appartenant à l'une et à l'autre (6, III), sera remplacée par *celle à une droite neutre* Ω, de l'association de deux droites M', M'', ces mots exprimant ici que le point de concours de M', M'' se trouve sur Ω.

[R8aα]

SUR LA PROPRIÉTÉ DE CONCAVITÉ DE L'HERPOLHODIE DE POINSOT;

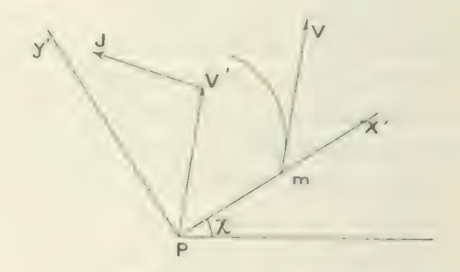
Par M. H. Padé.

1. « La propriété de l'herpolhodie de Poinsot, de n'avoir pas de rebroussements et d'être toujours con-

cave vers le pôle des coordonnées, peut être établie sans faire aucun emprunt à la théorie de la courbure et par les seuls moyens élémentaires de la mécanique classique.

» Il suffit de démontrer que la vitesse du point qui décrit l'hodographe correspondant au mouvement du pôle instantané sur l'herpolodie, vitesse qui est équipollente à l'accélération de ce pôle, a un moment de signe invariable autour du pôle des coordonnées, pris pour centre de cette hodographe. » (*Soc. des sc. phys. et nat. de Bordeaux*, séance du 5 avril 1906.)

2. Soient :



m la position, à l'instant t, sur l'herpolhodie qu'il décrit, du pôle instantané ;

P le pied de la perpendiculaire abaissée du point fixe sur le plan fixe tangent en m à l'ellipsoïde d'inertie ;

ρ, χ les coordonnées polaires du point m, le point P étant le pôle de ces coordonnées ;

Px', Py' deux axes rectangulaires dont le premier coïncide avec Pm, et tels que $\widehat{x'Py'} = +\frac{\pi}{2}$;

mV la vitesse de m ;

PV' le vecteur équipollent à cette vitesse ; V' décrit l'hodographe du mouvement de m ;

J la vitesse de V', accélération de m.

3. L'herpolhodie n'aura pas d'inflexions [GILBERT. *Sur quelques formules d'un usage général dans la physique mathématique* (*Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles*, 14e année, 1890)], si l'angle que fait le vecteur mV avec une direction fixe quelconque du plan de la figure varie toujours dans le même sens; elle n'aura pas de rebroussements, si le vecteur mV n'est jamais nul.

Ces deux conditions seront simultanément réalisées, si *le moment de* J *autour de* P *conserve un signe invariable pendant toute la durée du mouvement* : nous allons constater qu'il en est effectivement ainsi.

4. Dans le système d'axes Px', Py', les coordonnées de V′ sont :

$$\frac{d\rho}{dt}, \quad \rho\frac{d\chi}{dt};$$

les projections de J, vitesse de V′, sont :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2, \quad \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\chi}{dt}\right).$$

Nous devons faire voir que le moment M de J autour de P, savoir :

$$\text{(A)} \quad M = \frac{d\rho}{dt}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\chi}{dt}\right) - \rho\frac{d\chi}{dt}\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2\right]$$

a un signe invariable.

Au moyen des équations du mouvement du point M, cette quantité s'exprime aisément en fonction de ρ seulement.

5. Soient :

A, B, C les moments principaux d'inertie autour du point fixe;

μ, D deux constantes positives ;
ε le nombre $+1$ ou -1 ;

$$a = -\frac{(B-D)(C-D)}{BCD}, \qquad b = -\frac{(C-D)(A-D)}{CAD},$$

$$c = -\frac{(A-D)(B-D)}{ABD};$$

$$\varphi(\rho^2) = -D(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c);$$

$$E = \frac{(A-D)(B-D)(C-D)}{ABCD}.$$

Les équations qui déterminent ρ et χ en fonction de t sont (*Nouv. Ann. de Math.*, 4[e] série, t. III, juillet 1903, p. 289) :

$$\left\{\begin{aligned} \rho\frac{d\rho}{dt} &= \varepsilon\mu\sqrt{\varphi(\rho^2)}, \\ \rho^2\frac{d\chi}{dt} &= \mu(\rho^2 + E). \end{aligned}\right.$$

Elles donnent immédiatement

$$\rho\frac{d\rho}{dt}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\chi}{dt}\right) = 2\mu^3\varphi(\rho^2)$$

$$\rho\frac{d^2\rho}{dt^2} = \mu^2\varphi'(\rho^2) - \frac{\mu^2\varphi(\rho^2)}{\rho^2};$$

d'où, en substituant dans (A),

$$\text{(B)}\quad M = \frac{\mu^3}{\rho^4}[(3\rho^2 + E)\varphi(\rho^2) - \rho^2(\rho^2 + E)\varphi'(\rho^2) + (\rho^2 + E)^3].$$

6. Posons

$$\varphi(\rho^2) = -D(\rho^6 - \alpha\rho^4 + \beta\rho^2 - \gamma),$$

en sorte que

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= a + b + c, \\ \beta &= bc + ca + ab, \\ \gamma &= abc; \end{aligned}\right.$$

après des réductions immédiates, et en tenant compte de ce que

$$E^2 + abc\,D = E^2 + \gamma D = 0,$$

on trouve :

$$(\mathrm{C})\quad M = \mu^3\,[(2DE + \alpha D + 1)\,\rho^2 + (2D\beta + \alpha DE - 3E)];$$

ou, en remplaçant α et β par leurs valeurs en A, B, C, D :

$$(\mathrm{D})\quad \begin{cases} M = \dfrac{\mu^3 D^2}{ABC}\,[(A + B + C - 2D)\,\rho^2 + (A + B + C)\,E] \\[2ex] \quad = \dfrac{\mu^3 D^3 \rho^2}{ABC}\left[(A + B + C)\,\dfrac{\rho^2 + E}{D\rho^2} - 2\right] \end{cases}$$

7. La quantité M se trouve ainsi mise sous la forme d'un produit de deux facteurs.

Le premier de ces facteurs, qui n'est nul que quand l'herpolhodie est réduite à un seul point, cas que nous laissons naturellement de côté, est essentiellement positif.

Pendant le mouvement, ρ^2 demeure une moyenne entre a, b, c ; la quantité $\dfrac{\rho^2 + E}{D\rho^2}$ est une moyenne entre

$$\frac{a + E}{Da},\quad \frac{b + E}{Db},\quad \frac{c + E}{Dc},$$

ou, simplement,

$$\frac{1}{A},\quad \frac{1}{B},\quad \frac{1}{C};$$

le second facteur est donc une moyenne entre

$$\frac{B + C - A}{A},\quad \frac{C + A - B}{B},\quad \frac{A + B - C}{C},$$

quantités essentiellement positives.

Donc M garde un signe invariable.

[P2a]

SUR LES COURBES INVARIANTES PAR POLAIRES RÉCIPROQUES;

Par M. S. LATTÈS.

La détermination de toutes les courbes planes invariantes dans une transformation par polaires réciproques a été effectuée depuis longtemps par M. Darboux qui a traité aussi le problème dans l'espace : M. Darboux détermine la surface invariante la plus générale comme enveloppe d'une famille de quadriques invariantes [1].

J'ai étudié, d'une façon générale, dans ma thèse [2], les courbes invariantes par une transformation de contact en ramenant leur recherche à la résolution d'équations fonctionnelles. Je me propose de montrer dans cette Note comment le problème résolu par M. Darboux peut être traité, à ce dernier point de vue, du moins dans le cas du plan.

On peut, sans diminuer la généralité, supposer que la conique directrice a pour équation

$$x^2 - 2y = 0.$$

La transformation par polaires réciproques est alors définie par les équations suivantes :

$$\text{(T)} \qquad X = y', \qquad Y = xy' - y, \qquad Y' = x.$$

---

(1) Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Note IX).

(2) *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (Paris, 1906); et *Annali di Matematica*, 3e série, t. XIII.

Soit $y = \Psi(x)$ l'équation d'une courbe invariante par (T). Si (x, y, y') est un élément de cette courbe, l'élément (X, Y, Y') doit appartenir à la même courbe. On doit donc avoir

$$X = \Psi'(x), \qquad \Psi(X) = x\Psi'(x) - \Psi(x), \qquad \Psi'(X) = x;$$

d'où l'on déduit que la fonction $\Psi(x)$ doit vérifier les deux équations fonctionnelles suivantes :

$$(E) \qquad \Psi[\Psi'(x)] = x\Psi'(x) - \Psi(x),$$

$$(E') \qquad \Psi'[\Psi'(x)] = x.$$

Nous déterminerons d'abord toutes les solutions de l'équation (E'), puis nous chercherons quelles sont, parmi ces solutions, celles qui vérifient aussi l'équation (E). Si l'on pose

$$\Psi'(x) = \theta(x),$$

l'équation (E') devient

$$(E_1) \qquad \theta[\theta(x)] = x.$$

Cette nouvelle équation définit une courbe $y = \theta(x)$ invariante par la transformation

$$(1) \qquad X = y, \qquad Y = x,$$

qui est une transformation par symétrie par rapport à la droite $y = x$. Amenons l'axe de symétrie à être l'axe Ox. Il suffit de poser

$$x = u + v, \qquad X = U + V,$$
$$y = u - v, \qquad Y = U - V.$$

La transformation (1) devient alors

$$U = u, \qquad V = -v.$$

Toute courbe invariante par cette transformation

peut être définie par les équations

$$u = F(t), \qquad v = \Phi(t),$$

$F(t)$ *étant une fonction paire arbitraire et* $\Phi(t)$ *une fonction impaire arbitraire du paramètre* t. Pour $t = 0$, on a un point où cette courbe coupe l'axe de symétrie : nous supposerons que les fonctions F et Φ sont définies dans le domaine de $t = 0$, le point $t = 0$ pouvant d'ailleurs être réel ou imaginaire.

En remontant à la transformation (1), on voit que toute courbe invariante par cette transformation peut être définie par les équations

$$x = F(t) + \Phi(t),$$
$$y = \theta(x) = F(t) - \Phi(t).$$

On a ainsi la solution générale $\theta(x)$ de l'équation (E_1). La solution générale $\Psi(x)$ de l'équation (E′) est donc définie par les équations

$$x = F(t) + \Phi(t),$$
$$\Psi'(x) = F(t) - \Phi(t),$$

$\Psi'(x)$ désignant la dérivée de $\Psi(x)$ *par rapport à* x. On a donc

$$x = F(t) + \Phi(t),$$
$$\frac{d\Psi(x)}{dt} = [F(t) - \Phi(t)][F'(t) + \Phi'(t)]$$

et, en intégrant de 0 à t, on voit que la courbe invariante cherchée est définie par les deux équations

$$x = F(t) + \Phi(t),$$
$$y = C + \int_0^t [F(t) - \Phi(t)][F'(t) + \Phi'(t)]\,dt$$

ou bien

$$(2)\quad \begin{cases} x = F(t) + \Phi(t), \\ y = C + \dfrac{F^2(t) - \Phi^2(t)}{2} - \dfrac{F^2(o)}{2} + \displaystyle\int_0^t (F\Phi' - \Phi F')\,dt \end{cases}$$

et l'on a

$$y' = \frac{dy}{dx} = F(t) - \Phi(t).$$

Il faut chercher, parmi ces courbes, quelles sont celles qui vérifient l'équation (E). Cette équation exprime que, si (x, y, y') est un élément de la courbe, le point

$$X = y', \qquad Y = xy' - y$$

appartient aussi à la courbe. Or, on a

$$X = F(t) - \Phi(t),$$
$$Y = \frac{F^2(t) - \Phi^2(t)}{2} + \frac{F^2(o)}{2} - C - \int_0^t (F\Phi' - \Phi F')\,dt.$$

Changeons t en $-t$ dans ces équations. Elles deviennent

$$X = F(t) + \Phi(t),$$
$$Y = \frac{F^2(t) - \Phi^2(t)}{2} + \frac{F^2(o)}{2} - C - \int_0^{-t} (F\Phi' - \Phi F')\,dt.$$

Il faut que la courbe définie par ces équations coïncide avec la courbe définie par les équations (2). Comme X et x sont égaux, il faut que Y et y le soient aussi, ce qui donne

$$2\left(\frac{F^2(o)}{2} - C\right) - \int_0^t (F\Phi' - \Phi F')\,dt$$
$$- \int_0^{-t} (F\Phi' - \Phi F')\,dt \equiv o.$$

Or $F\Phi' - \Phi F'$ est une fonction *paire* de t et par

suite l'intégrale $\int_0^t (F\Phi' - \Phi F')\,dt$ est une fonction *impaire* de t. L'égalité précédente devient donc

$$\frac{F(0)}{2} = C.$$

Les équations générales d'une courbe invariante par la transformation (T) *sont donc*

$$(3)\quad \begin{cases} x = F(t) + \Phi(t), \\ y = \dfrac{F(0)}{2} + \displaystyle\int_0^t [F(t) - \Phi(t)][F'(t) + \Phi'(t)]\,dt, \end{cases}$$

$F(t)$ *étant une fonction paire arbitraire de* t et $\Phi(t)$ *une fonction impaire arbitraire de* t.

Remarquons que cette courbe contient au moins un élément double de la transformation (T) : c'est l'élément

$$x = F(0), \qquad y = \frac{F(0)}{2}, \qquad y' = F(0).$$

En ce point la courbe est tangente à la conique directrice.

Parmi les courbes (3) il y a une infinité de courbes algébriques : on en obtient, par exemple, en prenant pour $F(t)$ un polynome en t^2 et pour $\Phi(t)$ le produit de t par un polynome en t^2. La conique directrice $2y - x^2 = 0$ s'obtient en prenant $F(t) = t^2$, $\Phi(t) = 0$.

On voit que la méthode précédente permet de déduire de toute courbe qui admet un axe de symétrie une courbe qui est sa propre polaire réciproque par rapport à une conique donnée.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1906. COMPOSITION D'ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

Solution par M. Jean SERVAIS.

I. *Étudier la variation de la fonction* $y = \mathrm{L}\,\dfrac{x-1}{x+2}$, *où* L *désigne un logarithme népérien.*

II. *Évaluer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, *et calculer sa valeur à* $\frac{1}{100}$ *près quand* $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

III. *L'équation* $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$ *a pour racines les longueurs des côtés d'un triangle* ABC.

Former l'équation ayant pour racines cos A, cos B, cos C.

IV. *On donne une fonction* $f(x)$.

Deux autres fonctions $\varphi(x)$ *et* $\mathrm{F}(x)$ *sont définies par les relations suivantes, où* K *est un nombre constant :*

$$\varphi(x) = \mathrm{K}\int \frac{dx}{f'(x)}, \qquad \mathrm{F}(x) = f(x)\,\varphi(x).$$

Démontrer qu'on a identiquement :

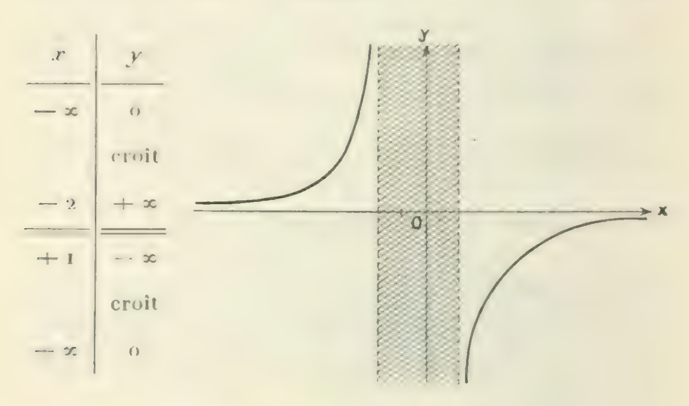
$$\frac{\mathrm{F}''(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{2\mathrm{K}}{f(x)\varphi(x)},$$

$$\frac{\mathrm{F}'''(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)}.$$

I. Pour que y soit réelle, il faut que l'on ait :

$$\text{soit} \quad x > 1, \qquad \text{soit} \quad x < -2.$$

Dans les deux intervalles $(-\infty, -2)$ et $(1, +\infty)$ la fonction $\frac{x-1}{x+2}$ est *croissante* : dans le premier intervalle elle croît de 1 à $+\infty$, dans le second de 0 à 1. Comme le logarithme népérien varie dans le même sens que le nombre, on a immédiatement le Tableau suivant et la courbe ci-jointe :



x	y
$-\infty$	0
	croît
-2	$+\infty$
$+1$	$-\infty$
	croît
$+\infty$	0

II. Pour évaluer l'intégrale

$$J = \int_0^\alpha \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}},$$

posons $x = \operatorname{tang}\varphi$; supposons le radical pris avec le signe + et désignons par β l'arc positif, plus petit que $\frac{\pi}{2}$, tel que

$$\operatorname{tang}\beta = \alpha ;$$

l'intégrale devient :

$$J = \int_0^\beta \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1+\sin^2\varphi} = [\operatorname{arc\,tang}\sin\varphi]_0^\beta = \operatorname{arc\,tang}(\sin\beta).$$

Or, lorsque

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on a

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc, dans le cas particulier où

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on a

$$\mathrm{J} = \text{arc tang}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = 0,523.$$

III. Soient a, b, c les trois côtés du triangle. On a, comme on sait,

$$1 + \cos\mathrm{A} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}$$
$$= \frac{(a+b+c-2a)(a+b+c)a}{2abc}.$$

Or, en vertu des relations entre les coefficients et les racines, on a

$$a+b+c = \alpha, \qquad abc = \gamma.$$

D'où l'on tire

$$1 + \cos\mathrm{A} = \frac{a\alpha(\alpha - 2a)}{2\gamma}.$$

Si donc nous désignons par x l'une quelconque des racines de l'équation donnée

(1) $$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0,$$

et par y la racine correspondante de l'équation cherchée, le problème proposé revient à faire la transformée définie par

(2) $$1 + y = \frac{\alpha x(\alpha - 2x)}{2\gamma}.$$

Il n'y a donc qu'à éliminer x entre cette égalité et

l'équation (1). L'égalité (2) s'écrit

$$(3) \qquad 2\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\gamma(y+1) = 0.$$

En multipliant celle-ci par x, l'équation (1) par -2α, et ajoutant, on obtient

$$(4) \qquad \alpha^2 x^2 + 2[\gamma(y+1) - \alpha\beta]x + 2\alpha\gamma = 0.$$

L'équation cherchée est le résultant des équations (3) et (4). C'est donc :

$$[4\alpha^2\gamma - 2\alpha^2\gamma(y+1)]^2 + [4\alpha\gamma(y+1) - 2\alpha^2\beta + \alpha^4]$$
$$[2\alpha^3\gamma + 4\gamma^2(y+1) - 4\alpha\beta\gamma(y+1)] = 0.$$

Ce qui donne, en ordonnant par rapport à $y+1$,

$$8\gamma^2(y+1)^3 + 4\alpha\gamma(\alpha^2 - 4\beta)(y+1)^2$$
$$- 2\alpha^2(\alpha^2\beta - 4\beta^2 + 2\alpha\gamma)(y+1) + \alpha^3(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) = 0.$$

IV. L'égalité donnée

$$\varphi(x) = K\int \frac{dx}{f'(x)}$$

revient à celle-ci

$$(1) \qquad \varphi'(x)f'(x) = K$$

qui donne, par dérivation,

$$(2) \qquad \varphi'(x)f''(x) + \varphi''(x)f'(x) = 0.$$

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de l'égalité

$$F(x) = f(x)\varphi(x),$$

on a

$$(3) \qquad \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

qui, en dérivant, donne

$$(4) \qquad \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{F'^2(x)}{F^2(x)} - \frac{f'^2(x)}{f^2(x)} - \frac{\varphi'^2(x)}{\varphi^2(x)}.$$

En remplaçant dans cette égalité $\frac{F'(x)}{F(x)}$ par sa valeur tirée de (3), simplifiant et tenant compte de l'égalité (1), on obtient la première égalité demandée

$$(5)\qquad \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{2K}{f(x)\varphi(x)}.$$

Dérivons, à leur tour, les deux membres de l'égalité (5) et nous obtenons

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{F'''(x)}{F(x)} &= \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)} \\ &+ \frac{F''(x)F'(x)}{F^2(x)} - \frac{f''(x)f'(x)}{f^2(x)} - \frac{\varphi''(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \\ &- \frac{2K[f'(x)\varphi(x) + \varphi'(x)f(x)]}{f^2(x)\varphi^2(x)}. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons, dans cette égalité, $\frac{F''(x)F'(x)}{F^2(x)}$ par sa valeur obtenue en multipliant membre à membre les égalités (3) et (5) et nous obtiendrons, toutes simplifications faites, la seconde des égalités demandées :

$$\frac{F'''(x)}{F(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)}.$$

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Dans le plan représentatif de la variable complexe z, on trace une circonférence de rayon* R, *ayant pour centre l'origine et coupant en* A *et* B *l'axe des quantités imaginaires, et en* C *la partie positive de l'axe des quantités réelles. Calculer l'intégrale*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{c} \frac{z^3\,dz}{e^{2i\pi z}-1};$$

1° *Le long de la circonférence précédente ;*

2° *Le long du contour formé par la demi-circonférence* ACB *et le diamètre* BA.

On supposera $p < R^3 \leq p + 1$, p *désignant un entier positif.*

II. *Donner l'expression de la fonction* $e^{2i\pi z} - 1$ *sous forme d'un produit infini de facteurs primaires.*

III. *Si u et v désignent deux paramètres variables indépendants, la droite ayant pour équations :*

$$x = uz - 2u - u^3 - 2uv^3,$$
$$y = vz - 3v^2 - u^2v - 2v^4$$

(en coordonnées rectangulaires) est normale à une infinité de surfaces qu'on propose de déterminer.

IV. *Déterminer les surfaces* S *telles que, en un point quelconque de l'une de ces surfaces, ses deux tangentes principales, d'une part, et ses deux directions principales, d'autre part, se projettent sur le plan des xy suivant deux angles ayant leurs bissectrices parallèles à* Ox *et* Oy.

Lignes de courbure de ces surfaces.

Épreuve pratique. — *On considère l'intégrale définie*

$$\int_{1+\varepsilon}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 + 2x - 4}} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Cette intégrale a-t-elle une limite pour $\varepsilon = 0$ *?*
Si oui, calculer cette limite. (Juillet 1906.)

Marseille.

Épreuve théorique. — *Parmi les surfaces qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles*

$$px + qy = 0,$$

déterminer celles qui satisfont aussi à la condition

$$(p^2 + q^2)(x^2 + y^2) = K^2.$$

où K est une constante donnée, et déterminer leurs lignes de courbure.

Épreuve pratique. — *Calculer à* 0,0001 *près l'intégrale définie*

$$u = \int_0^1 \frac{dz}{(z^2+1)\sqrt{z^2+2}}:$$

1° *Quand le point z va du point* $z=0$ *au point* $z=1$ *directement sur l'axe des x;*

2° *Quand le point z varie entre les mêmes limites sur un arc de cercle qui passe au point* $z=\frac{i}{2}$;

3° *Quand le point z varie entre les mêmes limites sur un arc de cercle qui passe au point* $z=\frac{4i}{3}$.

Solution. — On trouve $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

(Juillet 1906.)

Paris.

Épreuve théorique. — I. *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$(I) \qquad p^2+q^2 = 2U(x,y), \qquad p=\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

où $U(x, y)$ *est une fonction connue des variables x et y, soit S une surface intégrale quelconque de cette équation :*

1° *On demande de démontrer que les caractéristiques situées sur cette surface coupent orthogonalement les sections planes faites dans la surface par les plans parallèles au plan des x, y;*

2° *Les courbes caractéristiques* Γ *de l'équation* (I) *se projettent sur le plan des x, y suivant une famille de courbes* (γ) *dépendant de deux constantes arbitraires. Former l'équation différentielle du second ordre dont ces courbes* (γ) *sont l'intégrale générale;*

3° *Déterminer la fonction* $U(x, y)$ *de façon que les courbes* (γ) *soient des circonférences orthogonales à l'axe des x;*

4° *Trouver une intégrale complète de l'équation* (I) *ainsi obtenue et une intégrale particulière se réduisant à zéro pour* $x = 0$.

Note. — *Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires.*

II. *On considère l'équation différentielle du premier ordre*

$$\frac{dy}{dx} = Xy^2 + X_1, \tag{1}$$

où X *et* X_1 *sont des fonctions de la variable complexe* x *holomorphe à l'intérieur du cercle* C, *de rayon* a, *décrit du point* $x = 0$ *pour centre, et sur ce cercle lui-même. Soit un nombre positif tel que l'on ait*

$$|X| \leq m, \qquad |X_1| \leq m \qquad \text{pour} \qquad |x| \leq a.$$

L'équation (1) *admet une intégrale particulière* y_1, *holomorphe dans le domaine de l'origine et se réduisant à zéro pour* $x = 0$. *On demande de trouver un nombre positif* ρ, *ne dépendant que de* m *et de* a, *tel que l'intégrale* y_1 *soit sûrement holomorphe dans le cercle de rayon* ρ *décrit de l'origine pour centre.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_1^{13} \frac{\sqrt[3]{x - \sqrt{2x - 1}}}{x - 1}\, dx.$$

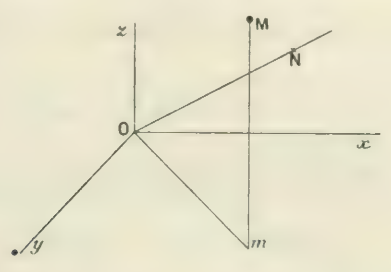
(Juillet 1905.)

Épreuve théorique. — *Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :*

$$Pp + Qq = R, \qquad \left(p = \frac{dz}{dx},\ q = \frac{dz}{dy}\right), \tag{1}$$

où les coefficients P, Q, R *sont des fonctions de deux variables indépendantes* x *et* y, *et de la fonction inconnue* z, *on demande ce qu'on entend par caractéristiques de cette équation. Démontrer que l'intégration de l'équation* (1) *revient à la détermination des caractéristiques.*

Application. — *Soient* Ox, Oy, Oz *un système de trois axes de coordonnées rectangulaires,* M *un point d'une surface* (S), *m la projection du point* M *sur le plan* xOy, N *le point où le plan tangent en* M *à la surface* (S) *rencontre la perpendiculaire élevée par l'origine au plan* OmM.



1° *On demande l'équation générale des surfaces* (S), *telles que l'on ait* $ON = Om$, *pour un point quelconque* M *pris sur la surface;*

2° *Déterminer la fonction arbitraire de façon que la surface* (S) *passe par la courbe représentée par les deux équations*

$$y = 0, \qquad z^2 = 2x;$$

3° *Trouver les lignes asymptotiques de cette dernière surface.*

II. *On fait décrire à la variable complexe z le segment de ligne droite joignant l'origine au point* $z = +i$. *Quelle est la valeur finale de la fonction* arc sin *z*, *si la valeur initiale est égale à* $+\pi$?

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(4\cos x + 5)^2}.$$

(Octobre 1905.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — I. *Les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles*

(1) $$1 + p^2 + q^2 = q^2 f(y)$$

ont un système de lignes de courbure dans des plans parallèles au plan zOx.

II. *Les surfaces définies par l'équation*

$$(2) \qquad r - pz = \varphi(p)$$

ont un système de lignes de courbure dans des plans parallèles à Oy.

III. *Les équations précédentes* (1) *et* (2) *ont toujours des solutions communes.*

IV. *Déterminer ces solutions communes en prenant*

$$f(y) = 1 + \frac{1}{4y^2}, \qquad \varphi(p) = ap.$$

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Épreuve pratique. — *Une lemniscate est donnée dans un plan horizontal : un cercle variable dont le plan est vertical a pour diamètre un rayon vecteur de la lemniscate ; trouver l'aire de la surface ainsi engendrée.*

Prendre des coordonnées polaires : rayon vecteur, longitude φ, latitude θ, et, si le temps le permet, démontrer la formule qui donne l'expression de l'aire au moyen d'une intégrale double. (Juin 1906.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Bordeaux.

Épreuve théorique. — I. *Théorie des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable, dans le cas d'un système holonome à deux degrés de liberté.*

II. *Une plaque matérielle infiniment mince a, à l'instant $t = 0$, une certaine rotation instantanée donnée ω_0 autour d'un point de son plan. A partir de cet instant,*

elle est soumise à l'action d'une force unique inconnue F *agissant, dans son plan, sur un de ses points* A. *On observe la loi du mouvement que prend le point* A, *et l'on demande de déterminer la loi de la force* F *et le mouvement de la plaque.*

Cas particulier où la plaque part du repos et où le mouvement de A *est rectiligne et uniformément accéléré.*

Épreuve pratique. — *Un cercle plonge verticalement dans un liquide homogène pesant, sur la surface duquel ne s'exerce aucune pression; les deux tiers de la surface du cercle sont immergés; déterminer la distance du centre de pression à la surface du liquide.*

Rayon du cercle $= 0^m,12$.

(Juillet 1906.)

Lille.

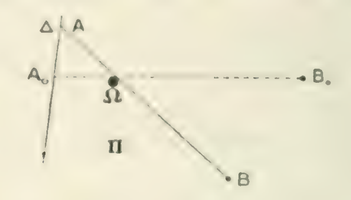
Épreuve théorique. — *Théorie élémentaire de l'effet gyroscopique.*

Après avoir démontré la coïncidence approchée de l'axe de révolution du gyroscope et du moment cinétique résultant du système par rapport au point de suspension, on étudiera les apparences du mouvement et l'on établira la formule classique, en supposant qu'il n'existe qu'une force appliquée, constante en grandeur, direction et sens, sollicitant un point de l'axe de révolution.

Problèmes : I. Cinématique. — *Une figure plane se mouvant dans un plan* P, *on demande le lieu des points du plan* P *pour lesquels la vitesse, à un instant donné, du point superposé de la figure mobile : 1° est dans un rapport constant soit avec l'accélération totale, soit avec l'accélération tangentielle, soit avec l'accélération normale; 2° fait un angle constant avec l'accélération.*

II. Dynamique. — *Une barre homogène et pesante* AB, *de poids p et de longueur l, est astreinte à se déplacer dans un plan vertical* Π; *l'extrémité* A*y glisse sans frottement sur une droite verticale* Δ; *à l'extrémité* B *est accroché un poids $\frac{p}{2}$; cette barre s'appuie, aussi sans frot-*

tement, sur une cheville Ω, de rayon négligeable, normale



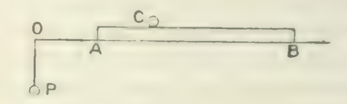
au plan Π et distante de Δ de $\dfrac{l\sqrt{3}}{4}$.

1° *Étudier le mouvement de cette barre abandonnée dans une position horizontale* A_0B_0 *sans vitesse initiale;*

2° *Rechercher la position d'équilibre stable de cette barre et étudier les petites oscillations près de cette position d'équilibre.* (Juillet 1906.)

Marseille.

Épreuve théorique. — *Une droite* AB *pesante et homo-*



gène repose par deux pointes émoussées A *et* B *sur une droite horizontale. La pointe* A *glisse sans frottement, mais la pointe* B *glisse avec frottement. Au point* A *est attaché un fil horizontal, dont on néglige la masse, qui passe sur une très petite poulie* O *et qui porte à son extrémité un poids* P. *Sur* AB *glisse avec frottement un point pesant* C. *Le système est primitivement en repos et le point* C *est en* A. *On abandonne le système à lui-même, trouver son mouvement.*

Les trois corps ont la même masse et le coefficient de frottement est égal à un quart.

On remarquera que la pression en B *varie.*

Épreuve pratique. — *L'intrados d'une voûte en plein cintre, d'épaisseur constante, a* 12^m *de rayon; l'extrados a* 16^m *de rayon. Vérifier la stabilité de la voûte en tra-*

çant la courbe des pressions. Le coefficient de frottement est 0,75.

Donner en fonction du poids 2P *de la voûte la poussée horizontale à la culée en supposant que la courbe des pressions passe au tiers extérieur du joint à la naissance et au tiers extérieur de la clef.*

On fera l'épure en prenant 2cm *par mètre.*

(Juillet 1906.)

Nancy.

Épreuve écrite. — *Envisageons un fil homogène pesant ayant la forme d'un arc de cercle* AB, *de rayon* R, *de longueur* $2l$, *de densité* ε. *Supposons que ce fil rigide soit assujetti à glisser sur un plan horizontal* π.

Chaque élément dm du fil est attiré par un axe fixe OX, *situé dans le plan* π, *proportionnellement à sa distance à cet axe et à sa masse dm; soit f l'intensité de l'attraction exercée sur l'unité de masse à l'unité de distance.*

A l'instant initial on imprime au fil rigide une rotation de n tours à la seconde, dans le sens direct, autour de la perpendiculaire menée au plan π *par l'extrémité* A *du fil; puis on abandonne le fil à son mouvement de glissement sur le plan* π *avec cet état initial des vitesses, la corde* AB *étant supposée à l'instant* $t = 0$ *parallèle à l'axe fixe* OX *à une distance* Δ *de cet axe.*

On demande : 1° *d'étudier le mouvement du fil rigide dans le plan fixe* π; 2° *la pression que le fil exerce sur le plan fixe* π. *On s'attachera particulièrement au cas où*

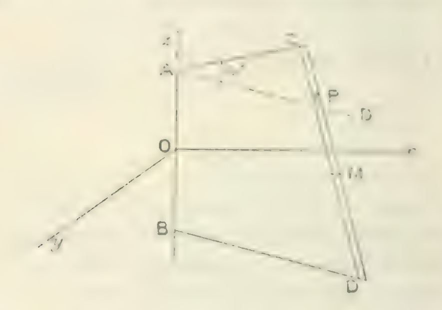
$$R = \frac{20^{\text{cm}}}{\pi}, \qquad l = 20^{\text{cm}}, \qquad \varepsilon = 7,7,$$
$$f = 3 \text{ dynes}, \qquad n = 8, \qquad \Delta = 100^{\text{cm}}.$$

(Juillet 1905.)

Paris.

Épreuve théorique. — *Un cadre rigide gauche* ABDCA *est mobile autour d'un axe vertical* O*z qui renferme le côté* AB *du cadre. Le côté* CD *est un tube creux, de très*

faible section, dans lequel glisse sans frottement un point pesant P *de masse* m. *Étudier le mouvement du système d'après les données suivantes : les trois côtés* AB, AC, BD *du cadre ont même longueur* l, *les côtés* AC, BD *sont per-*



pendiculaires à AB, *et* (AD' *désignant une demi-droite parallèle à* BD *et de même sens*) *l'angle* D'AC *compté positivement autour de la demi-verticale ascendante* Oz *est égal à* 60°. *Enfin, le moment d'inertie du cadre seul autour de* Oz *est égal à* $4ml^2$.

Étudier, en particulier, le mouvement qui a lieu quand on abandonne le système sans vitesse, le point P *occupant le milieu* M *du côté* CD.

On pourra définir la position du système par l'angle θ *que fait avec un plan vertical fixe* xOz, *le plan* MOz *et par la distance* MP $= \lambda$ *comptée positivement dans le sens* CD.

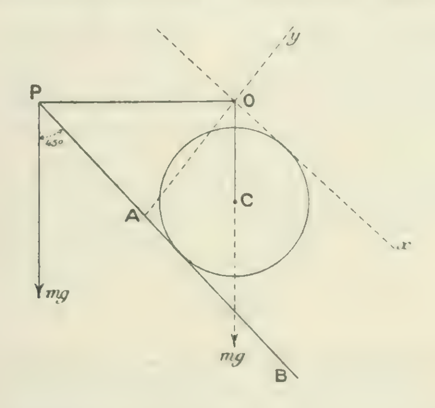
ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cercle solide, plein, homogène et pesant, dont le rayon est égal à un mètre et la masse à* 500^{g}, *est lancé dans le plan vertical* xOy *sur une droite horizontale fixe, dépolie,* Ox. *A l'instant initial* $t = 0$, *le centre* C *du cercle est animé d'une vitesse horizontale de* 10^{m} *par seconde, dans le sens* Ox, *et le disque tourne autour de* C *avec une vitesse de* 5 *tours à la seconde, dans le sens* xOy (Oy *demi-verticale ascendante*). *Le coefficient de frottement entre le cercle et la droite* Ox *étant* 0,20, *on demande de calculer :* 1° *l'instant* t_1, *où la vitesse du centre* C *du cercle changera de sens ;* 2° *l'instant* t_2 *où* C *reprendra sa position initiale ;* 3° *l'instant* t_3 *où le glisse-*

ment sera détruit par le frottement ; 4° *la valeur (en unités C. G. S.) de la force vive perdue par le cercle entre les instants* $t = 0$ *et* $t = t_3$.

NOTE. — *On adoptera comme valeur de* g *(accélération de la pesanteur)* : $g = 981$ (C. G. S.). *On négligera le frottement de roulement.*

(Octobre 1905.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un fil parfaitement flexible, inextensible, et sans masse, de longueur* $4l$, *est attaché par une de ses extrémités à un point matériel pesant* P, *et par*

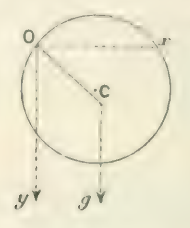


l'autre extrémité au centre C *d'un cercle solide homogène et pesant, de rayon* l *dont la masse* m *est égale à celle du point* P. *Le système étant abandonné sans vitesse, dans un plan vertical* xOy, *on demande d'étudier son mouvement, en supposant que le fil glisse sans frottement sur le point fixe* O, *et que le point* P *et le disque* C *glissent sans frottement sur une droite* AB *inclinée à* 45° *sur la verticale, et située au-dessous de* O *à une distance de* O *égale à* $2l$.

Calculer la tension du fil POC *à l'instant initial.*

La disposition initiale du fil étant celle de la figure, et l'angle initial de OC *avec la direction* AB *étant de* 45°, *décider si le fil reste tendu ou non au début du mouvement.*

Épreuve pratique. — *Une circonférence de cercle homogène et pesante (cerceau) de centre C et de diamètre égal à 1m est fixée par un de ses points O. Le cerceau étant*



abandonné sans vitesse initiale dans le plan vertical xOy, calculer :

1° *La durée des oscillations infiniment petites du pendule composé ainsi formé;*

2° *L'angle initial de OC avec la verticale descendante étant, non plus très petit, mais égal à 30 degrés, calculer la réaction qu'exerce l'appui O sur le cerceau à l'instant où C traverse la verticale Oy, ainsi que la durée, à $\frac{1}{100}$ de seconde près, d'une demi-oscillation du cerceau.*

(Juillet 1905.)

Poitiers.

Épreuve théorique : Cinématique. — *Une figure invariable se meut dans son plan de manière que deux de ses droites demeurent tangentes à un même arc de cycloïde. Trouver dans ce mouvement les deux courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.*

Dynamique. — *Dans un plan vertical xOy (Oy vertical et dirigé vers le haut) une barre homogène pesante AB de masse M et de longueur $2l$ peut tourner sans frottement autour de son milieu O; une sphère de rayon très petit et de masse m est fixée en A; en B est attaché un pendule simple constitué par un fil sans masse de longueur r et par une masse m fixée à son extrémité c.*

Former les équations du mouvement du système. Y a-t-il des positions d'équilibre stable? Étudier les petits mouvements dans leur voisinage.

(On suppose que le pendule peut osciller librement en dehors du plan vertical xOy.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'arc de cycloïde défini par les formules*

$$x = R(\theta - \sin\theta),$$
$$y = R(1 - \cos\theta),$$

où θ varie de o à une valeur α inférieure à π :

1° *Trouver les coordonnées ξ, η du centre de gravité de l'aire comprise entre cet arc, l'axe des x et l'ordonnée correspondant à $\theta = \alpha$;*

2° *Calculer, en supposant l'aire précédente homogène et de densité δ, le moment d'inertie de l'aire par rapport à l'axe des y.*

Application au cas particulier $\alpha = \pi$.

(Juillet 1905.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Le mouvement d'un trièdre trirectangle* (T) *ou* ($Oxyz$), *par rapport à un trièdre analogue* (T_1) *ou* ($O_1x_1y_1z_1$), *étant donné par les projections ξ, η, ζ; p, q, r de la translation et de la rotation instantanées sur les axes mobiles, on demande à un instant t :*

1° *Les coordonnées du centre de courbure de la trajectoire du point* M (x, y, z);

2° *Les lieux géométriques des points* (x, y, z) *dont l'accélération normale* (ou *l'accélération tangentielle*) *est nulle.*

II. *Une parabole concave vers le haut peut tourner librement autour de son axe qui est vertical : les extrémités d'une barre homogène pesante* AB *de longueur* $2l$ *sont assujetties à glisser sans frottement sur la parabole, dont on regarde la masse comme nulle.*

Équations du mouvement du système. Calcul des réactions en A *et* B. *Positions d'équilibre relatif. Étude des petits mouvements dans leur voisinage.* (Juin 1906.)

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une surface étant donnée par les équations*

$$y = ux, \qquad z = v + x\varphi(u, v), \qquad x\varphi'_v(u, v) + 1 = 0,$$

où φ est une fonction quelconque des paramètres u et v, définir géométriquement le réseau formé par les deux familles de courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ Prouver que ce réseau est conjugué.

Déterminer les lignes de courbure des surfaces (S) qu'on obtient en prenant

$$\varphi = \sqrt{1 + u^2}\,\frac{e^{U+V} + e^{-U-V}}{2},$$

U étant une fonction arbitraire de u, et V une fonction arbitraire de v, indiquer la nature de ces deux familles de courbes.

Former l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction φ pour que les plans osculateurs des courbes $v = \text{const.}$ menés aux divers points de chaque courbe $u = \text{const.}$ soient parallèles à une droite dont les coefficients directeurs ne dépendent que de u. Montrer que la forme générale de φ est alors

$$\varphi = U(u) + U_1(u)V_1(v) + U_2(u)V_2(v),$$

les cinq fonctions mises en évidence étant arbitraires, et que les surfaces S précédemment considérées sont parmi les surfaces correspondantes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnée la surface qui a pour équation*

$$2y^3 - 3xyz + z^2 = 0$$

déterminer ses lignes asymptotiques et construire leurs projections sur le plan des xy, en faisant prendre successivement diverses valeurs à la constante d'intégration.

(Octobre 1905.)

Épreuve théorique. — *On considère les deux paraboloïdes*

$$x^2 + y^2 = 2az,$$
$$x^2 + y^2 = -2az,$$

et les droites qui sont tangentes communes à ces deux surfaces. Déterminer les arêtes de rebroussement des développables engendrées par ces droites.

Équations qui déterminent la surface minima ayant pour ligne géodésique la développée d'une parabole.

Épreuve pratique. — *Étudier les sections par les plans de coordonnées et par des plans parallèles au plan des x, y de la surface lieu du point dont les coordonnées en x, y, z s'expriment d'une manière suivante :*

$$x = u + \frac{u^3}{3} + uv^2,$$
$$y = v^3,$$
$$z = (u^2 + v^2)^2 + 2u^2 - 2v^2.$$

(Mars 1905.)

Épreuve théorique. — *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles suivantes :*

$$4u\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + 4v\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = 1\ ;$$

1° *Intégrer les équations différentielles de ses caractéristiques;*

2° *Montrer que ces caractéristiques sont les lignes géodésiques d'une certaine surface dont l'élément linéaire est*

$$ds^2 = \frac{4u\,dv^2 - 4v\,du\,dv + du^2}{4(u - v^2)};$$

3° *En substituant aux deux variables* u *et* v *les suivantes :*

$$v \quad \text{et} \quad \sqrt{u - v^2 - \omega},$$

prouver que la surface est applicable sur des surfaces de révolution. Déterminer les méridiens de ces surfaces de révolution.

Épreuve pratique. — *Étant donné l'ellipsoïde lieu du point dont les coordonnées rectangulaires s'expriment en fonction de deux paramètres* u *et* v *par les formules*

$$x = \sqrt{\frac{a(a-u)(a-v)}{(a-b)(a-c)}},$$

$$y = \sqrt{\frac{b(b-u)(b-v)}{(b-a)(b-c)}},$$

$$z = \sqrt{\frac{c(c-u)(c-v)}{(c-a)(c-b)}};$$

1° *En déduire l'expression des deux formes quadratiques de différentielles*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$d\gamma\, dx + d\gamma'\, dy + d\gamma''\, dz$$

(où $\gamma, \gamma', \gamma''$ *sont les cosinus directeurs de la normale)*;

2° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques, des lignes de courbure, l'équation aux rayons de courbure principaux.* (Mars 1906.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

480.

(1859, p. 266; 1899, p. [illegible])

Soient D_0 *un cercle,* D_1 *une développante de* D_0, D_2 *une développante de* D_1, ..., D_n *une développante de* D_{n-1}. *Appelons* D_n *développante du cercle de l'ordre* n. *Cela posé, on propose de démontrer le théorème suivant :*

Si une figure plane varie en restant semblable à elle-

même, et si trois droites de cette figure ont chacune pour enveloppe une développante de cercle de l'ordre n, toute autre droite de la figure a pour enveloppe une développante de cercle du même ordre. (P. DE LAFFITTE.)

SOLUTION

Par M. THIÉ.

Soit (F) une figure plane qui varie dans son plan en restant semblable à elle-même. Toute droite D de cette figure enveloppe une certaine courbe. Pour une position donnée (F), on obtient le point δ où D touche cette enveloppe par la construction suivante, qui est bien connue :

Soit ω le *centre instantané de rotation et de similitude* qui correspond à la position considérée. Le point δ est le point de rencontre de D et d'une droite issue du point ω faisant avec D un angle θ qui ne dépend que des éléments qui caractérisent la variation infinitésimale de (F). Cet angle θ est donc indépendant de la droite particulière considérée D.

Par δ menons la perpendiculaire D' à D. Soient m et m' les projections du point ω sur D et sur D'; ωm et $\omega m'$ sont rectangulaires et l'on a

$$\frac{\omega m'}{\omega m} = \cot\theta.$$

Si donc nous considérons plusieurs droites D quelconques de la figure (F), la figure formée par les droites correspondantes D' dérive de la figure formée par les droites D, par une *rotation* d'un angle droit autour de ω, suivie d'une *homothétie* caractérisée par le rapport $\cot\theta$. Nous parvenons donc à ce résultat :

Soient D_1, D_2, ... *diverses droites de la figure* (F), D'_1, D'_2, ... *les normales aux courbes enveloppes de ces droites, aux points de contact de ces courbes et des droites* D_1, D_2, ... *pour une même position de* (F). *La figure* (D'_1, D'_2, ...) *est semblable à la figure* (D_1, D_2, ...) : *elle reste donc constamment semblable à elle-même.*

Il est maintenant facile d'établir le théorème énoncé par voie de récurrence.

Supposons, en effet, qu'il soit vérifié, quand les dévelop-

pantes de cercle considérées sont de rang $n-1$. Soient D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites de la figure (F), les trois premières enveloppant des développantes de cercle de rang n. Soient D'_1, D'_2, D'_3, D'_4 les normales aux enveloppes des quatre droites considérées. D'_1, D'_2, D'_3 enveloppent les développées des courbes enveloppes de D_1, D_2, D_3, c'est-à-dire des développantes de cercle de rang $n-1$. Donc, en vertu de l'hypothèse, D'_4 enveloppe aussi une développante de cercle de rang $n-1$. Donc, D_4, etc.

Or, le théorème est vrai si l'on suppose $n=-1$, autrement dit si les droites D_1, D_2, D_3 enveloppent des *développées* de cercle, c'est-à-dire passent par des points fixes. Il est, en effet, bien connu que, *si trois droites d'une figure de forme semblable à elle-même passent par trois points fixes, il en est de même de toute autre droite de la figure.*

Le théorème correspondant au cas où $n=0$ est encore bien connu (théorème de Bobillier).

2019.

(1905, p. 479.)

Par l'un des axes d'une conique W on mène un plan v perpendiculaire au plan de cette conique; un segment de longueur constante l se déplace sous les conditions suivantes : l'une de ses extrémités décrit la conique W, il reste constamment normal à cette conique, et son autre extrémité est dans le plan v; démontrer que cette seconde extrémité décrit une conique V (à laquelle le segment est d'ailleurs constamment normal).

Avec l'autre axe de la conique W, et une autre longueur constante m, on aura une nouvelle conique U. Démontrer qu'un certain segment de longueur constante p peut se déplacer en ayant ses extrémités sur les coniques U et V, et en restant normal à ces deux coniques.

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

La conique W étant une ellipse dont les demi-axes sont

$$OA = a, \qquad OB = b \qquad (b < a);$$

considérons dans le plan v la droite OC faisant avec OA un angle dont le sinus est $\frac{b}{a}$, l'ellipse est située sur le cylindre d'axe OC et de rayon b. Soit HM un rayon du cylindre dont l'extrémité M est située sur W. Il est normal à OC et à W. Un segment MP de longueur l a son extrémité P sur la perpendiculaire HH′ abaissée de H sur OA.

Soient $OH' = x$ et $H'P = z$, on a

$$z^2 = l^2 - b^2 + x^2 \frac{b^2}{c^2},$$

ou

$$c^2 z^2 - b^2 x^2 = c^2 (l^2 - b^2);$$

V est une hyperbole d'axes OA et Oz et dont une asymptote est OC.

On a de même, pour l'équation de la conique U dans le plan yOz,

$$(b^2 - a^2) z^2 - a^2 y^2 = (b^2 - a^2)(m^2 - a^2)$$

ou

$$c^2 z^2 + a^2 y^2 = c^2 (m^2 - a^2);$$

U est une ellipse dont les axes sont Oy et Oz.

Considérons la conique V comme la conique W et formons dans le plan yOz l'équation du lieu correspondant à une longueur p; en posant

$$A = l^2 - b^2, \qquad B = -\frac{c^2}{b^2}(l^2 - b^2),$$

on a

$$(A - B) y^2 - B z^2 = (A - B)(p^2 - B)$$

ou

$$a^2 y^2 + c^2 z^2 = a^2 \left(p^2 + \frac{c^2}{b^2} (l^2 - b^2) \right).$$

Déterminons p^2 de façon que cette équation soit identique à celle de U, il suffit que

$$p^2 = c^2 \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{l^2}{b^2} \right).$$

On a ainsi la relation

$$\frac{p^2}{c^2} + \frac{l^2}{b^2} = \frac{m^2}{a^2}.$$

Il reste à montrer que le segment MP est normal à la conique V : considérons le segment M_1P_1 voisin de MP; le cylindre de révolution d'axe MM_1 et de rayon l coupe le plan φ suivant une conique passant par PP_1; à la limite PP_1 est tangente au cylindre et à la conique V, donc cette tangente est perpendiculaire au rayon MP du cylindre.

Autres solutions de MM. Abramescu, J. Rose et Valère Maes.

2021.

(1905, p. 480.)

Soit un triangle ABC, *et soient* M, N, P *les milieux des côtés. Considérons les projections* D, E, F *d'un même point sur ces côtés. Si* a, b, c *sont respectivement les intersections des droites* NP *et* EF, PM *et* FD, MN *et* DE, *le triangle* abc *est conjugué par rapport au cercle* DEF.

(G. Fontené.)

NOTE.

Cette question se trouve résolue par l'article de M. Fontené : *Sur le cercle pédal*, du numéro de février.

QUESTIONS.

2042. Soient, dans un plan vertical, Ox une droite horizontale, Oy une droite verticale dirigée de haut en bas. Construisons : 1° une cardioïde ayant son point de rebroussement en O et son axe dirigé suivant Ox; soit A son second point de rencontre avec Ox; 2° une lemniscate ayant son point double en O, tangente à Ox et Oy et située dans l'angle xOy et dans l'angle opposé par le sommet.

Un point matériel pesant M est abandonné sans vitesse initiale en A et assujetti à décrire la cardioïde (on fait abstraction des résistances passives de toute nature). Pour chaque position du point M on construit la bissectrice de l'angle xOM, qui rencontre la lemniscate en deux points. Démontrer que chacun de ces points décrit la lemniscate d'un mouvement uniforme.

(R. B.)

[$M^1 5 c\alpha$]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA STROPHOÏDE ET SUR LES CUBIQUES QUI COÏNCIDENT AVEC LEURS CISSOÏDALES;

Par M. F. Gomes TEIXEIRA.

Nous allons donner, dans la première partie de ce travail, une propriété de la strophoïde qui nous paraît intéressante et qui n'a pas été encore remarquée, croyons-nous. Ensuite, en généralisant le résultat obtenu, nous chercherons les cubiques qui coïncident avec les cissoïdales d'elles-mêmes et d'une droite ou d'une circonférence.

I.

Rappelons d'abord un théorème de M. de Longchamps dont nous ferons usage. Ce théorème a été obtenu par une voie purement géométrique par ce savant géomètre; mais on peut le démontrer aussi clairement par l'analyse, comme on va voir.

Considérons une courbe quelconque C, *une droite* D *et un point* O, *non situé sur cette droite, et menons par* O *une autre droite arbitraire* D_1. *Soient* R *et* S *les points où* D_1 *coupe la courbe et la droite* D, *respectivement;* ρ_1 *et* ρ_2 *les vecteurs de ces points, rapportés à l'origine* O, *et* M *un point de* D_1 *dont le vecteur* ρ *soit égal à la différence* $\rho_2 - \rho_1$. *Le lieu des positions que* M *prend quand* D_1 *varie, en passant toujours par* O, *est une courbe nommée, comme on sait,* cissoïdale *de la courbe* C *et de la droite* D

par rapport au point O, *que nous nommerons* pôle.

Cela posé, prenons pour origine des coordonnées le point O, et pour axe des abscisses la perpendiculaire à D qui passe par ce point, et représentons par θ l'angle formé par D_1 avec cet axe, par (x, y) les coordonnées de M, par (x_1, y_1) les coordonnées de R et par a la distance de O à la droite D. On a alors

$$x = a - \rho_1 \cos\theta, \qquad y = a \operatorname{tang}\theta - \rho_1 \sin\theta,$$
$$x_1 = \rho_1 \cos\theta, \qquad y_1 = \rho_1 \sin\theta;$$

et par conséquent les équations de la tangente à la cissoïdale au point M et de la tangente à la courbe C au point R sont les suivantes :

$$(\rho_1 \sin\theta - \rho'_1 \cos\theta)\, y + \left(\rho'_1 \sin\theta + \rho_1 \cos\theta - \frac{a}{\cos^2\theta}\right) x$$
$$= \frac{2a\rho_1}{\cos\theta} - \rho_1^2 - \frac{a^2}{\cos^2\theta},$$
$$(\rho'_1 \cos\theta - \rho_1 \sin\theta)\, y - (\rho_1 \cos\theta + \rho'_1 \sin\theta)\, x = -\rho_1^2,$$

où ρ'_1 représente la dérivée de ρ_1 par rapport à θ.

On voit, au moyen de ces équations, que les coordonnées y_1 et y_2 des points où ces tangentes coupent la droite D sont déterminées par les équations

$$y_1 = \frac{2a\rho_1 - \rho_1^2 \cos\theta - a\cos\theta\,(\rho'_1 \sin\theta + \rho_1 \cos\theta)}{(\rho_1 \sin\theta - \rho'_1 \cos\theta)\cos\theta},$$
$$y_2 = \frac{\rho_1^2 - a\,(\rho_1 \cos\theta + \rho'_1 \sin\theta)}{\rho_1 \sin\theta - \rho'_1 \cos\theta}.$$

On a aussi, en représentant par y_3 l'ordonnée du point où la droite D_1 coupe D,

$$y_3 = a \operatorname{tang}\theta.$$

Il résulte de ces équations l'identité

$$y_1 - y_2 = 2(y_3 - y_2).$$

au moyen de laquelle on voit que *la droite qui passe par O et par le point* (x, y) *de la cissoïdale coupe la droite donnée D en un point équidistant de ceux où elle est coupée par la tangente à la cissoïdale au point* (x, y) *et par la tangente à la courbe C au point* (x_1, y_1).

Ce théorème est celui que nous nous proposions de démontrer analytiquement. Il a été communiqué en 1885 par M. de Longchamps à l'Association française pour l'avancement des sciences, au Congrès de Grenoble.

II.

Appliquons maintenant ce théorème à la strophoïde.

Considérons une droite L, et deux points A et B, dont le premier soit situé sur cette droite. Si par le point B on mène des droites qui coupent L, et si l'on prend sur chacune, à partir du point K d'intersection, deux segments KM et KM_1 tels qu'on ait

$$KM = KM_1 = KA,$$

le lieu des points M et M_1 qu'on obtient est, comme on sait bien, une strophoïde ([1]). On sait aussi que la distance du point B à la droite L est égale à la distance de L à l'asymptote réelle, laquelle est parallèle à L. On a donc, en représentant par H le point d'intersection de la droite MM_1 avec cette asymptote,

$$BM + BM_1 = 2BK = BH.$$

On voit au moyen de cette relation qu'une partie de

([1]) On peut voir la théorie de cette cubique dans notre *Tratados de las curvas especiales notables*, ouvrage couronné et publié par l'Académie des Sciences de Madrid (Madrid, 1906, p. 16).

la cubique considérée est la cissoïdale de l'autre partie et de l'asymptote, et que, par conséquent, *les tangentes à la strophoïde aux points* M *et* M_1 *coupent l'asymptote en deux points équidistants de celui où elle est coupée par la droite* BK.

Ce théorème est celui que nous nous proposions d'établir : il en résulte les corollaires suivants :

1° *La tangente à la strophoïde au point* B *passe par le point où cette cubique coupe son asymptote réelle.*

2° *Les deux points de la strophoïde où la tangente est parallèle à l'asymptote réelle sont situés sur une droite qui passe par* B.

III.

La strophoïde n'est pas la seule cubique qui jouisse de la propriété de coïncider avec une cissoïdale d'elle-même et d'une droite par rapport à un point de la cubique. Nous allons chercher les cubiques qui satisfont à cette condition.

Prenons pour origine des coordonnées le pôle de la cissoïdale et pour une des coordonnées une parallèle à la droite donnée, et considérons l'équation générale des cubiques :

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ky = 0$$

ou, en posant

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$$

pour la rapporter aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}(A\cos^3\theta + B\cos^2\theta\sin\theta + C\cos\theta\sin^2\theta + D\sin^3\theta)\rho^2 \\ + (E\cos^2\theta + F\cos\theta\sin\theta + G\sin^2\theta)\rho + H\cos\theta + K\sin\theta = 0.\end{aligned}$$

En représentant par ρ_1 et ρ_2 les racines de cette équation, on a

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{E\cos^2\theta + F\cos^2\theta\sin\theta + G\sin^2\theta}{A\cos^3\theta + B\cos^2\theta\sin\theta + C\cos\theta\sin^2\theta + D\sin^3\theta}.$$

Supposons maintenant que l'équation de la droite donnée soit $x = a$, ou en coordonnées polaires

$$\rho' = \frac{a}{\cos\theta}.$$

La condition pour que la cubique coïncide avec la cissoïdale d'elle-même et de cette droite, c'est qu'on ait identiquement

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho',$$

ou, par conséquent,

$$\begin{aligned} &E + F\,\text{tang}\,\theta + G\,\text{tang}^2\theta \\ &\quad = -a(A + B\,\text{tang}\,\theta + C\,\text{tang}^2\theta + D\,\text{tang}^3\theta), \end{aligned}$$

quelle que soit la valeur de θ. Cette condition est donc exprimée par les équations

$$E = -aA, \quad F = -aB, \quad G = -aC, \quad D = 0,$$

au moyen desquelles on voit que l'équation de la cubique doit avoir la forme

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2)(x - a) + Hx + Ky = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

La condition pour qu'une cubique soit la cissoïdale d'elle-même et d'une droite est qu'une de ses asymptotes coïncide avec cette droite et que les deux autres se coupent en un point de la cubique. Ce point est alors le pôle de la cissoïdale.

Il résulte de ce qui précède cet autre théorème, qui

contient celui relatif à la strophoïde, précédemment énoncé :

Si deux asymptotes d'une cubique se coupent en un point de cette courbe, et si par ce point on mène une droite quelconque D, *les tangentes à la cubique aux points où elle est coupée par cette droite coupent la troisième asymptote en deux points équidistants du point d'intersection de* D *avec cette dernière asymptote.*

Une classe très importante de cubiques auxquelles ces théorèmes sont applicables est celle des *cubiques circulaires qui passent par leur foyer singulier.* Cette classe de cubiques comprend, en effet, des cubiques considérées par Van Rees et Chasles dans leurs études sur les focales du cône de base circulaire oblique (*Correspondance mathématique de Quetelet*, t. V et VI).

IV.

Voici encore une autre question analogue à la précédente :

Chercher les cubiques qui sont cissoïdales d'elles-mêmes et d'une circonférence par rapport à un point où la cubique et la circonférence se coupent.

En prenant ce point pour origine des coordonnées et la droite qui passe par le centre de la circonférence pour axe des abscisses, l'équation polaire de cette courbe est

$$\rho'' = 2a\cos\theta,$$

et l'identité

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho''$$

donne, au moyen d'une analyse semblable à celle qui

fut employée précédemment, les conditions

$$E = -2aA, \quad F = -2aB, \quad E = -2aC, \quad F = -2aD, \quad G = 0.$$

L'équation de la cubique doit donc avoir la forme

$$(x^2 + y^2 - 2ax)(Ax - By) + Hx - Ky = 0.$$

Nous avons le théorème suivant :

Les conditions pour qu'une cubique soit cissoïdale d'elle-même et d'une circonférence par rapport au point où ces courbes se coupent sont les suivantes : 1° *que la cubique soit circulaire;* 2° *que le pôle coïncide avec le point où la cubique est coupée par son asymptote réelle;* 3° *que le centre de la circonférence coïncide avec le foyer singulier de la cubique.*

[K2d]

SUR QUELQUES CERCLES DU PLAN D'UN TRIANGLE ;

PAR M. ÉMILE WEBER.

Soient P un point quelconque du plan d'un triangle ABC ; α, β, γ ses coordonnées trilinéaires normales. Désignons par A_1, B_1, C_1 les intersections respectives des côtés BC, CA, AB avec les droites AP, BP, CP. Par les trois points A_1, B_1, C_1 faisons passer un cercle. Celui-ci coupera les côtés de ABC une seconde fois respectivement en A'_1, B'_1, C'_1. On sait que les droites AA'_1, BB'_1, CC'_1 concourent en un même point P′ (TERQUEM, *N. A.*, 1842, p. 403 ; G. CANDIDO, *N. A.*, 1900, p. 249).

Nous nous proposons, dans cette étude, de mettre

en lumière la relation géométrique unissant les deux points P et P'. Nous établirons ensuite la condition à laquelle ces points doivent satisfaire, pour que le cercle correspondant soit tangent au cercle d'Euler, ce qui nous donnera une extension du théorème de Feuerbach à comparer avec celle que M. Fontené a établie dans les *Nouvelles Annales* (1905) pour une autre famille de cercles.

1. Au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences (Oran, 1888), M. Emile Lemoine a donné l'expression des coordonnées α', β', γ' du point P' en fonction de celles du point P. Il a obtenu :

$$\alpha' = \frac{1}{a\alpha(\Delta - a\alpha)[b\gamma(\Delta - c\gamma) + c\beta(\Delta - b\beta)] + a^2\beta\gamma(\Delta - c\gamma)(\Delta - b\beta)},$$

où $\Delta = a\alpha + b\beta + c\gamma$. β', γ' s'écrivent au moyen de α' par permutations tournantes.

Sous cette forme, les coordonnées α', β', γ' paraissent extrêmement compliquées et peu maniables dans les calculs. Nous allons les définir d'une façon plus simple. A cet effet, observons que α' est proportionnel à :

$$\frac{1}{a\left[\frac{b}{\beta(\Delta - b\beta)} + \frac{c}{\gamma(\Delta - c\gamma)} + \frac{a}{\alpha(\Delta - a\alpha)}\right]}.$$

La même coordonnée, écrite dans le système barycentrique, devient

$$\frac{1}{\frac{b}{\beta(\Delta - b\beta)} + \frac{c}{\gamma(\Delta - c\gamma)} + \frac{a}{\alpha(\Delta - a\alpha)}}.$$

A présent, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées barycentriques de P, on voit *que le point* P' *est*

le réciproque de l'anticomplémentaire d'un point D, *dont les coordonnées barycentriques sont* $\frac{a^2}{x(y+z)}$, $\frac{b^2}{y(z+x)}$, $\frac{c^2}{z(x+y)}$.

2. Ce point D a une signification remarquable. Pour la faire ressortir, nous allons rappeler un théorème dû à Steiner :

Si l'on joint les trois sommets aux milieux des côtés correspondants B_1C_1, C_1A_1, A_1C_1 *du triangle déterminé par les pieds des droites* AP, BP, CP, *on obtient trois droites courantes en un point* D'. Il est facile de voir que les coordonnées barycentriques de D' sont $x(y+z)$, $y(z+x)$, $z(x+y)$. En les comparant à celles du point D, on voit *que le point* D *est l'inverse triangulaire du point* D'.

3. Appliquons ce qui précède, comme vérification, au cercle d'Euler. Ici, le point P est le point H, orthocentre du triangle fondamental ; le triangle $A_1B_1C_1$ est le triangle orthique. Si nous joignons les sommets aux milieux des côtés du triangle orthique, nous obtiendrons les symédianes de ABC : le point D' est donc, dans ce cas, le point K de Lemoine, dont l'inverse D est le centre de gravité de ABC. D'autre part, le centre de gravité est lui-même le réciproque de son anticomplémentaire. De là découle clairement la notion du cercle des neuf points.

4. Dans certains cas, l'énoncé de la correspondance entre les points P et P' se simplifie en introduisant la notion de la newtonienne d'une transversale. Si

$$Ax + By + Cz = 0$$

est l'équation, en coordonnées barycentriques, d'une transversale, les milieux des diagonales du quadrilatère complet, que cette transversale détermine avec les côtés de ABC, sont sur la droite

$$\sum \frac{-x+y+z}{A} = 0,$$

appelée (par M. de Longchamps) la newtonienne de la transversale.

En écrivant la dernière équation sous la forme :

$$\sum x\left(-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) = 0,$$

il ressort, *que le pôle trilinéaire d'une newtonienne est le réciproque de l'anticomplémentaire du pôle trilinéaire de la transversale correspondante.*

5. Si nous prenons maintenant, pour le point P, le foyer de la parabole de Kiepert $\left(\frac{a^2}{b^2-c^2}, \frac{b^2}{c^2-a^2}, \frac{c^2}{a^2-b^2}\right.$ en coordonnées barycentriques$\Big)$, le point D sera le pôle trilinéaire de la droite d'Euler et P′ le réciproque de l'anticomplémentaire de ce pôle. Nous dirons donc : *Il passe un cercle par les six pieds des droites joignant les trois sommets au foyer de la parabole de Kiepert et au pôle trilinéaire de la newtonienne de la droite d'Euler.*

6. Si le point P est le point de Steiner $\left(\frac{1}{b^2-c^2}, \frac{1}{c^2-a^2}, \frac{1}{a^2-b^2}\right.$ en coordonnées barycentriques$\Big)$, le point D sera le foyer de la parabole de Kiepert et P′ le réciproque de l'anticomplémentaire de ce foyer. En observant que le foyer de la parabole de Kiepert est

le pôle trilinéaire du diamètre de Brocard, nous pourrons énoncer le théorème :

Il passe un cercle par les six pieds des droites joignant les sommets au point de Steiner et au pôle trilinéaire de la newtonienne du diamètre de Brocard.

7. En plaçant le point P au point K de Lemoine, le point D est le point $\frac{1}{b^2+c^2}, \frac{1}{c^2+a^2}, \frac{1}{a^2+b^2}$, de sorte que son inverse le point D' $[a^2(b^2+c^2), b^2(c^2+a^2), c^2(a^2+b^2)]$ est le point milieu de la distance des deux points de Brocard En d'autres termes : *si l'on joint les sommets d'un triangle aux milieux des côtés correspondants du triangle formé par les pieds des symédianes, on trace trois droites se coupant au milieu de la distance des deux points de Brocard.*

8. Signalons encore un cas particulier digne de remarque : si P est réciproque de l'orthocentre H, le point D sera l'orthocentre H et nous dirons :

Il passe un cercle par les six pieds des droites joignant les trois sommets au réciproque de l'orthocentre et au pôle de la newtonienne de l'axe orthique.

9. Pour étendre le théorème de Feuerbach aux cercles de cette famille, nous nous appuierons sur la proposition suivante : le cercle circonscrit à un triangle autopolaire à une hyperbole équilatère passe par le centre de cette courbe.

On peut considérer le triangle $A_1B_1C_1$ comme le triangle diagonal du quadrilatère ABCP et par suite comme triangle autopolaire à l'hyperbole équilatère

ABCP'. De même, le triangle $A_1B'_1C'_1$ est autopolaire par rapport à l'hyperbole équilatère ABCP'. Il en résulte que le cercle $A_1B_1C_1$ coupe le cercle d'Euler en deux points, centres des hyperboles équilatères ABCP, ABCP'. *Conséquemment, lorsque* P *et* P' *appartiendront à une même hyperbole équilatère circonscrite au triangle fondamental, le cercle* $A_1B_1C_1$ *sera tangent au cercle des neuf points.*

[P1f]

UN THÉORÈME SUR LA COLLINÉATION ET LA RÉCIPROCITÉ;

PAR M. STUYVAERT.

Le point de départ de ce travail est un théorème que nous appellerons *théorème de Reye* et dont voici l'énoncé :

Toutes les cubiques gauches passant par cinq points percent un plan fixe en des ternes de points qui sont les sommets de triangles conjugués par rapport à une même conique. (*Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, t. XIII.)

Cette propriété a été démontrée trop souvent pour qu'une nouvelle méthode de l'établir présente encore quelque intérêt en elle-même. Mais on peut analyser les relations du *théorème de Reye* avec des théories apparentées; ces recherches, poussées dans deux directions différentes, nous ont donné des résultats.

En considérant la gerbe de cubiques par cinq points comme un cas particulier de systèmes plus généraux, nous avons montré (*Comptes rendus*, novembre 1905)

comment les caractères spécifiques de cette gerbe entraînent le *théorème de Reye*.

Ici, au contraire, nous allons regarder cette proposition comme un analogue supérieur du *théorème de C. Sturm* sur les faisceaux de coniques, et nous étendons à l'espace une méthode qui réussit dans le plan.

1. Le *théorème de C. Sturm* peut se déduire de celui de *Desargues*. Ce dernier repose à son tour sur la propriété suivante :

Si x et X, y et Y sont deux couples d'éléments homologues de deux formes projectives superposées du premier ordre (ponctuelles ou faisceaux), les couples (x, Y), (y, X) et les éléments doubles de la projectivité sont en involution.

Cherchons l'analogue de ce théorème dans un espace à deux, trois ou même plusieurs dimensions. Pour la facilité du langage, bornons-nous à l'espace ordinaire : nous aurons à démontrer le théorème que voici :

Si le point Y et le plan U sont respectivement les homologues du point y et du plan u dans deux espaces collinéaires (le déterminant de la collinéation étant différent de zéro), Y est le pôle de u et y le pôle de U dans un système polaire ayant pour tétraèdre conjugué le tétraèdre fondamental de la collinéation.

M. C. Servais nous a communiqué verbalement une démonstration synthétique de cette propriété. Celle que nous donnons ici est analytique ; nous n'avons donc pas à nous occuper du cas des imaginaires.

Prenons les points doubles, supposés distincts, de

la collinéation pour sommets du tétraèdre de référence. Les formules de la projectivité peuvent alors s'écrire

$$\rho Y_i = \alpha_i y_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Un plan $U = \Sigma U_i X_i$ répond à un plan $u = \Sigma U_i \alpha_i x_i$, que l'on peut désigner par $\Sigma u_i x_i$; on a alors

$$\sigma u_i = \alpha_i U_i.$$

Or, dans un système polaire où le tétraèdre de référence est un tétraèdre conjugué et où le point y est le pôle du plan U, on a des relations de la forme

$$\rho' y_i = \beta_i U_i ;$$

par suite aussi

$$\rho' \alpha_i y_i = \alpha_i \beta_i U_i,$$

ou, d'après les formules précédentes,

$$\rho\rho' Y_i = \sigma \beta_i u_i ;$$

dans ce système polaire, le point Y est donc bien le pôle du plan u.

Le raisonnement, fait en sens inverse, démontre la réciproque :

Si les points Y et y sont respectivement les pôles des plans u et U par rapport à un système polaire, le point Y et le plan U sont respectivement les homologues du point y et du point u dans une collinéation ayant pour tétraèdre fondamental un tétraèdre polaire quelconque du système proposé.

2. La démonstration précédente suppose que les points doubles de la collinéation soient distincts. Le raisonnement qui va suivre établit le même théorème dans tous les cas.

Écrivons les équations de la collinéation sous la

forme

$$\rho Y_i = \sum_{j=1}^{j=4} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

En général a_{ij} diffère de a_{ji}, et la seule restriction à faire est que le déterminant des quantités a_{ij} ne soit pas nul.

Le plan $U \equiv \Sigma U_i X_i$ répond au plan $u \equiv \Sigma U_i \Sigma a_{ij} x_j$ et, si l'on désigne ce dernier par $\Sigma u_j x_j$, on a

$$\sigma u_j = \sum_{i=1}^{i=4} a_{ij} U_i.$$

Soient f_{ik} les coefficients réels d'une quadrique f réelle ou imaginaire; on a donc $f_{ik} = f_{ki}$. Si U est le plan polaire du point y par rapport à cette quadrique, on a

$$\tau U_i = \sum_{k=1}^{k=4} f_{ik} y_k,$$

d'où

$$\sigma\tau u_j = \sum_{i=1}^{i=4} a_{ij} \sum_{k=1}^{k=4} f_{ik} y_k.$$

Si le plan u est le plan polaire du point Y par rapport à la même quadrique, on a de même

$$\nu u_j = \sum_{i=1}^{i=4} f_{ij} Y_i,$$

d'où

$$\rho\nu u_j = \sum_{i=1}^{i=4} f_{ij} \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} y_k.$$

Les deux systèmes de valeurs trouvés pour les quantités u_j ne peuvent coexister, en général, que pour un

nombre fini de points y (ce nombre est 4). Mais elles sont compatibles, quel que soit le point y, si l'on a

$$\sum_{i=1}^{i=4} a_{ij} f_{ik} = \sum_{i=1}^{i=4} f_{ij} a_{ik} \qquad (j, k = 1, 2, 3, 4).$$

Ces conditions sont vérifiées identiquement, si l'on a $j = k$. De plus, les égalités demeurent inaltérées, si l'on permute j et k. On ne doit considérer que les cas où j par exemple est supérieur à k et, comme les nombres 1, 2, 3, 4 présentent six combinaisons, les relations précédentes sont au nombre de six entre les dix coefficients homogènes f_{ik} ; il y a donc, en général, ∞^3 quadriques satisfaisant à la condition d'avoir pour plans polaires de deux points homologues quelconques y et Y deux plans homologues aussi, mais en ordre inverse, U et u.

Démontrons que tout point double de la collinéation est le pôle d'un plan double par rapport à chacune de ces quadriques. Si un point z est double, il existe une valeur de ρ telle que l'on ait

$$\rho z_i = \sum_{j=1}^{j=4} a_{ij} z_j ;$$

soit v le plan polaire de z par rapport à une des ∞^3 quadriques trouvées, on a alors

$$\sigma v_k = \sum_{i=1}^{i=4} f_{ik} z_i ,$$

donc

$$\rho\sigma v_k = \sum_{i=1}^{i=4} f_{ik} \sum_{j=1}^{j=4} a_{ij} z_j ;$$

mais, à cause des conditions imposées aux quadriques f

et écrites plus haut, ces relations deviennent

$$\rho\tau v_k = \sum_{i=1}^{i=4} a_{ik} \sum_{j=1}^{j=4} f_{ij} z_j$$

et, puisque v est le plan polaire de z, on a enfin

$$\rho\tau v_k = \tau \sum_{i=1}^{i=4} a_{ik} v_i\,;$$

ceci exprime que v est un plan double, donné d'ailleurs par la même valeur de ρ qui a fourni le point double z. Ainsi, tout point double de la collinéation est le pôle d'un plan double par rapport à chacune des ∞^3 quadriques f. Il est visible que l'une de ces surfaces est déterminée, en général, par la condition que y est le pôle de U.

3. Voici, en passant, une application. Supposons le complexe tétraédral défini par deux espaces collinéaires (voir Reye, *Géométrie de position*). Soient a et b deux rayons du complexe ; a passe par deux points homologues y et Y ; b est l'intersection de deux plans homologues u et U. D'après le théorème du n° 1, y est le pôle de U et Y le pôle de u par rapport à une quadrique ayant pour tétraèdre conjugué le tétraèdre fondamental de la projectivité ; donc a et b sont deux droites conjuguées par rapport à cette quadrique. Les droites conjuguées du rayon a par rapport aux ∞^3 quadriques f ayant le tétraèdre fondamental pour tétraèdre polaire sont toutes des rayons du complexe. Ou encore le complexe est conjugué à lui-même par rapport à chacune de ces quadriques. (Ces propriétés sont connues.)

4. Les nos 1 et 2 sont indépendants du nombre de variables. Dans un plan, par exemple, on a la propriété suivante :

Si x et X sont deux points homologues, u et U deux droites homologues de deux systèmes plans collinéaires superposés, x est le pôle de U et X celui de u dans un système polaire ayant pour triangle conjugué le triangle fondamental de la collinéation. Et réciproquement.

Cette proposition conduit au *théorème de Reye* sur les cubiques gauches.

En effet, les rayons qui projettent les points d'une cubique gauche de deux d'entre eux, G et H par exemple, forment deux gerbes collinéaires et marquent, sur un plan μ, deux systèmes plans projectifs dont les points doubles sont les traces A, B, C de la cubique sur le plan μ.

Soient D, E, F trois points de la courbe; appelons D', E', F' les traces respectives de GD, GE, GF sur le plan μ et D'', E'', F'' celles de HD, HE, HF.

D'après le théorème qui vient d'être énoncé, D' et D'' sont respectivement les pôles de E''F'' et E'F' par rapport à une conique admettant le triangle ABC comme triangle conjugué.

Si l'on intervertit les rôles des points G et D, on voit que, dans la même conique, définie par son triangle conjugué ABC et par la condition que D' est le pôle de E''F'', on a maintenant la trace I de GH pour pôle de la droite *d* intersection des plans DEF et μ. Par interversion successive des points D, E, F, G, H entre eux, on reconnaît ainsi que le plan μ coupe chaque face du pentaèdre DEFGH suivant une droite et chaque arête opposée en un point et que ces dix droites sont les

polaires respectives de ces dix points par rapport à une même conique qui admet ABC comme triangle conjugué.

Cette propriété est l'analogue du *théorème de Desargues* relatif aux coniques; elle est connue ainsi que les cas particuliers que l'on peut en tirer lorsque certains sommets du pentaèdre coïncident.

L'analogue du *théorème de C. Sturm* en résulte immédiatement : toutes les cubiques gauches passant par les cinq points D, E, F, G, H percent le plan μ en des ternes de points A, B, C formant des triangles conjugués par rapport à une même conique; celle-ci est en effet complètement déterminée par le pentaèdre DEFGH.

[P4h]

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA TRANSFORMATION BIRATIONNELLE;

PAR M. H. LAURENT.

Soient i, i', i'', ... les racines d'une équation algébrique

$$f(z) = 0$$

de degré m. On sait que toute fonction rationnelle de i est réductible à la forme $\varphi(i)$, $\varphi(z)$ désignant un polynome entier de degré $m - 1$ au plus.

Considérons une fonction de m variables

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{m-1}$$

de la forme

$$x_0 + i x_1 + \ldots + i^{m-1} x_{m-1} = y.$$

et une expression de la forme

$$(1)\qquad \frac{ay+b}{a'y+b'} = \mathrm{Y},$$

a, b, a', b' désignant des quantités indépendantes des x mais pouvant contenir i et ses puissances. Si l'on remplace a, b, a', b', y par leurs valeurs exprimées en fonction de i, Y prendra la forme

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1 i + \ldots + \mathrm{X}_{m-1} i^{m-1}.$$

Pour lui faire acquérir cette forme on observera que Y est de la forme

$$\frac{u_0 + u_1 i + \ldots + u_{m-1} i^{m-1}}{v_0 + v_1 i + \ldots + v_{m-1} i^{m-1}},$$

où les u et les v sont fonctions linéaires des x, le numérateur et le dénominateur pouvant être remplacés par le reste de leur division par $f(i)$. Cela fait, on multipliera le numérateur et le dénominateur de la fraction précédente par

$$(v_0 + v_1 i' + \ldots)(v_0 + v_1 i'' + \ldots)(v_0 + v_1 i''' + \ldots)\ldots$$

qui est une fonction symétrique des racines de $\frac{f(z)}{z-i}$, et qui, par suite, est entier en i ; après cette opération, le numérateur et le dénominateur de Y seront des polynomes entiers en $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ de degré m au plus et le dénominateur ne contiendra plus i, Y aura donc la forme

$$\mathrm{Y} = \frac{\psi_0 + \psi_1 i + \ldots + \psi_{m-1} i^{m-1}}{\psi},$$

les ψ étant des fonctions entières des x de degré m.

On aura donc

$$\mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1 i + \ldots + \mathrm{X}_{m-1} i^{m-1} = \frac{\psi_0 + i\psi_1 + \ldots + i^{m-1}\psi_{m-1}}{\psi}.$$

Or, la racine i étant l'une quelconque des racines de $f(z)=0$, la formule précédente aura lieu en y remplaçant i par i', i'', ..., elle aura lieu pour m valeurs de i et l'on aura

$$(2)\qquad X_0=\frac{\varphi_0}{\psi},\qquad X_1=\frac{\varphi_1}{\psi},\qquad \ldots,\qquad X_{m-1}=\frac{\varphi_{m-1}}{\psi}.$$

Ces formules sont birationnelles, c'est-à-dire que l'on peut les résoudre par rapport aux x et exprimer leurs valeurs en fonction rationnelle de X_0, X_1, ..., X_n. Ce sont des formules analogues à celles de la transformation quadratique dans l'espace à deux dimensions.

Et, en effet, de la formule (1) on tire

$$y=\frac{AY-B}{A'Y+B'},$$

A, B, A', B' étant des polynomes entiers, et, en reprenant mot pour mot ce que nous venons de dire, on aura

$$x_0=\frac{\Psi_0}{\Psi},\qquad \ldots,\qquad x_{m-1}=\frac{\Psi_{m-1}}{\Psi},$$

les Ψ étant entiers et de degré $m-1$ en X_0, ..., X_{m-1}.

Les formules (2) sont celles d'un groupe dont il est facile de trouver des invariants différentiels. En considérant Y et y comme des variables complexes formées avec les clefs i, i^2, ,.., i^{m-1}, Y sera fonction de y et aura une dérivée $\frac{dY}{dy}$ bien déterminée, alors

$$\frac{dY}{dy}=\frac{\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_0}dx_0+\frac{\partial X_0}{\partial x_1}dx_1+\ldots\right)+i\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_0}dx_0+\ldots\right)\ldots}{dx_1+i\,dx_1+\ldots}$$

ne dépendant pas de $dx_0:dx_1:dx_2:\ldots$, on aura

$$\frac{\partial X_0}{\partial x_0}+i\frac{\partial X_2}{\partial x_0}+\ldots=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_0}+i\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots\right)=\ldots.$$

et ces équations se décomposeront encore en d'autres après avoir été rendues entières en i, en observant qu'elles ont encore lieu en changeant i en i', i'', ... Toutes ces équations ont pour solutions

$$X_0 = \frac{\psi_0}{\psi}, \qquad X_1 = \frac{\psi_1}{\psi}, \quad \ldots$$

Si, par exemple, $f(z) = z^2 + 1$, on aura

$$y = \frac{(a + \alpha i)(x_0 + x_1 i) + b + \beta i}{(a' + \alpha' i)(x_0 + x_1 i) + b' + \beta' i}$$

$$= \frac{a x_0 - \alpha x_1 + b + i(\alpha x_0 + a x_1 + \beta)}{a' x_0 - \alpha' x_1 + b' + i(\alpha' x_0 + a' x_1 + \beta')}$$

$$= \frac{(a x_0 - \alpha x_1 + b)(a' x_0 - \alpha' x_1 + b') + (\alpha x_0 + a x_1 + \beta)(\alpha' x_0 + a' x_1 + \beta')}{(a' x_0 - \alpha' x_1 + b')^2 + (\alpha' x_0 + a' x_1 + \beta')^2}$$

$$+ \frac{(a' x_0 - \alpha' x_1 + b')(\alpha x_0 + a x_1 + \beta) - (a x_0 - \alpha x_1 + b)(\alpha' x_0 + \ldots)}{(a' x_0 + \ldots)\ldots} i$$

et l'on aura

$$\frac{X_0}{(a x_0 - \alpha x_1 + b)(a' x_0 - \alpha' x_1 + b') + (\alpha x_0 + a x_1 + \beta)(\alpha' x_0 + a' x_1 + \beta')}$$

$$= \frac{X_1}{(a' x_0 - \alpha' x_1 + b')(\alpha x_0 + a x_1 + \beta) - (a x_0 - \alpha x_1 + b)(\alpha' x_0 + a' x_1 + \beta')}$$

$$= \frac{1}{(a' x_0 - \alpha' x_1 + b')^2 + (\alpha' x_0 + a' x_1 + \beta')^2}.$$

Ces équations sont de la forme

$$\frac{X_0}{uu' + vv'} = \frac{X_1}{u'v - v'u} = \frac{1}{v^2 + v'^2},$$

u, u', v, v' désignant des fonctions linéaires. Si v' est nul, on a

$$\frac{X_0}{uu'} = \frac{X_1}{vu'} = \frac{1}{v^2}.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1906.

Première composition de Mathématiques (Sciences I).

Solution par M. Jean SERVAIS.

On considère, dans l'espace, les droites (D) *dont les équations sont*

$$ux + vy - z + 1 = 0, \qquad x - y + uz + v = 0;$$

on regarde les paramètres u, v comme les coordonnées d'un point A *dans un plan* (P); *à chaque point* A *de ce plan correspond, en général, une droite* (D) *et une seule; par un point* M *de l'espace, il passe, en général, une droite* (D) *et une seule.*

Où doit être le point M *pour qu'il passe par ce point une infinité de droites* (D)? *Soit* M_0 *un tel point; quel est le lieu, dans le plan* P, *des points* A *auxquels correspondent les droites* (D), *en nombre infini, qui passent par le point* M_0? *Quand, inversement, le point* A *décrit ce lieu, quelle est la surface décrite par la droite* (D) *qui correspond au point* A?

Lorsque, dans le plan (P), *le point* A *décrit la parabole dont l'équation est* $v = au^2$, *la droite correspondante* (D) *décrit une surface* (Σ) *qui est, en général, du quatrième degré; la précédente étude permet de mettre en évidence des valeurs du paramètre a pour lesquelles cette surface contient un plan.*

Construire, en supposant $a = 1$, *la courbe du*

troisième degré, intersection de la surface (Σ) et du plan des xy.

Évaluer l'aire limitée par cette courbe et la droite dont l'équation est $y = 3,5$.

Il est clair qu'à chaque point A, c'est-à-dire, à chaque système de valeurs de u et v correspond une droite (D) et une seule à moins que les deux plans qui définissent (D) ne soient confondus, ce qui a lieu lorsque

$$\frac{u}{1} = \frac{v}{1} = \frac{1}{u} = \frac{1}{v},$$

c'est-à-dire lorsque le point A occupe l'une des deux positions

$$\Omega \left\{ \begin{array}{l} u = 1 \\ v = 1 \end{array} \right. \qquad \Omega' \left\{ \begin{array}{l} u = -1 \\ v = -1 \end{array} \right.$$

auxquels cas la droite est indéterminée dans le plan

(H) $$x + y + z + 1 = 0$$

ou

(H') $$x + y - z - 1 = 0.$$

Si l'on cherche les droites (D) qui passent par un point donné M de coordonnées x, y, z, on est amené à résoudre les deux équations

(1) $$\left\{ \begin{array}{l} ux - vy + z + 1 = 0, \\ uz - v \quad + x + y = 0 \end{array} \right.$$

en u et v qui admettent en général une solution et une seule sauf lorsque l'on a

(2) $$\frac{x}{z} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{x + y}.$$

En faisant la somme des termes des rapports (2), on

trouve le rapport égal

$$\frac{x+y+z+1}{x+y+z+1}$$

qui est égal à 1, si $x+y+z+1 \neq 0$.

Dans ce cas le point M est sur la droite

$$(\Delta) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = z, \\ y = 1. \end{array} \right.$$

Lorsque $x+y+z+1=0$, on peut remarquer que les rapports (2) sont aussi égaux à

$$\frac{z+1-x-y}{x+y-z-1}$$

qui est égal à -1, si $x+y-z-1 \neq 0$.

Dans ce cas le point M est sur la droite

$$(\Delta') \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = -z, \\ y = -1. \end{array} \right.$$

Enfin, si l'on a à la fois

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z+1=0, \\ x+y-z-1=0, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire si le point M est sur la droite d'intersection des plans Π et Π',

$$(\Delta'') \qquad \left\{ \begin{array}{l} x+y=0, \\ z+1=0. \end{array} \right.$$

Il y a bien une infinité de solutions pour u et v, car les équations (1) donnent

$$u = v,$$

mais la droite correspondante

$$u(x+y)+z+1=0,$$
$$x+y+u(z+1)=0$$

reste *fixe* et coïncide avec Δ'' lorsque u varie, elle n'est donc pas indéterminée.

En résumé, la droite (D) n'est indéterminée que lorsque le point M est sur l'une des droites Δ ou Δ'.

Soit M_0 un point de Δ de coordonnées

$$x_0 = z_0, \qquad y_0 = 1.$$

Pour ce point les deux équations (1) sont identiques et le lieu de (A) est la droite

$$\text{(L)} \qquad u z_0 + v + z_0 + 1 = 0$$

qui passe par le point Ω'.

De même si le point M_0 est sur Δ'

$$x_0 = -z_0, \qquad y_0 = -1,$$

le lieu de A est une droite

$$\text{(L')} \qquad u z_0 + v - z_0 - 1 = 0$$

qui passe par le point Ω.

Supposons que le point A décrive la droite (L), la surface engendrée par D aura pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z + 1 \\ z & 1 & x + y \\ z_0 & 1 & z_0 + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée, se décompose en deux plans :

$$x + y - z - 1 = 0,$$

qui est le plan Π', et

$$x + z - z_0(y + 1) = 0$$

qui est le plan passant par Δ' et le point M_0.

De même, lorsque A décrit la droite (L'), la surface engendrée par (D) se décompose en deux plans :

$$x + y + z + 1 = 0$$

qui est le plan Π, et

$$x - z - z_0(y - 1) = 0$$

qui est le plan passant par Δ et le point M_0.

Lorsque A décrit la parabole

(3) $$v = au^2,$$

la droite (D) décrit la surface (Σ) dont on obtient l'équation en éliminant u et v entre les équations (1) et (3), ce qui donne

(Σ) $$a[y(x+y) - z - 1]^2 = [z(z+1) - x(x+y)](x - yz).$$

Cette surface est du quatrième ordre en général. On prévoit qu'elle se décomposera en une surface du troisième ordre et l'un des plans Π ou Π′, lorsque la parabole passera par l'un des deux points Ω ou Ω′, c'est-à-dire lorsque

$$a = \pm 1.$$

Faisons, par exemple, $a = 1$ et mettons en évidence dans l'équation de (Σ) le plan Π, il reste la surface du troisième ordre qui a pour équation

$$y[(y-z)(x+y) + z^2] - x^2 - y^2 - zx + z - x - y + 1 = 0.$$

La section par le plan $z = 0$ est la cubique qui a pour équation

$$y^2(x+y) + x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0.$$

Pour construire cette courbe, remarquons d'abord que la droite $x + y = 0$ est évidemment une asymptote d'inflexion, puisqu'elle rencontre la courbe en trois points à l'infini et qu'elle est parallèle à une direction asymptotique simple. La direction de l'axe des x est une direction asymptotique double à laquelle corres-

pond une branche parabolique. En écrivant l'équation sous la forme

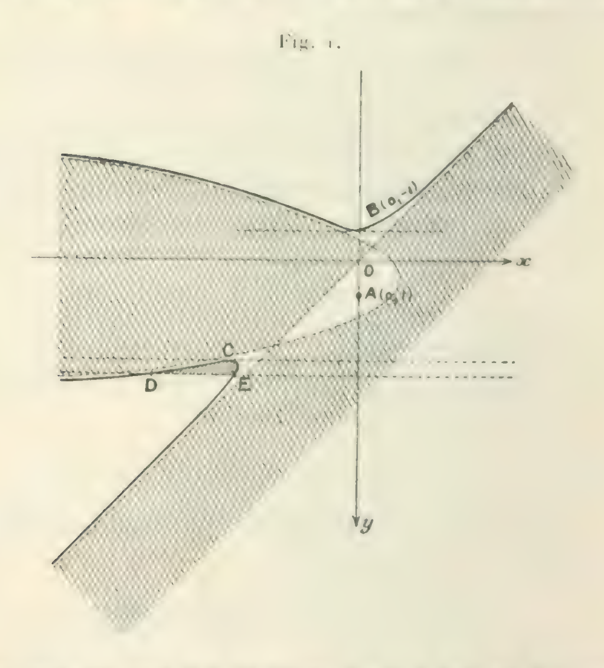
$$(x + y)[y^2 + x - y - 1] + 1 = 0,$$

on voit que la parabole

$$\text{(P)} \qquad y^2 + x - y - 1 = 0$$

est asymptote. Sous cette forme on voit également qu'il n'y a pas de points de la courbe à l'intérieur des

Fig. 1.



régions ombrées sur la figure, et cela met en évidence comment la courbe est asymptote à la droite et à la parabole.

La courbe présente un point double *isolé* au point

$$A: \qquad x = 0, \qquad y = 1.$$

Transportons les axes en ce point, en posant

$$x = X, \qquad y = 1 + Y.$$

L'équation devient

$$Y^2(X + Y) + X^2 + 2XY + 2Y^2 = 0.$$

Il est alors facile de mettre la courbe sous forme unicursale et de la construire (*fig.* 1).

On peut d'ailleurs également la construire sous la première forme, en résolvant par rapport à x.

L'équation ordonnée en x est

$$x^2 + (y^2 - 1)x + (y^2 - 1)(y - 1) = 0,$$

ce qui donne, en résolvant,

(4) $$2x = 1 - y^2 \pm (y - 1)\sqrt{(y + 1)(y - 3)}.$$

Ceci met en évidence les deux tangentes $y = -1$, $y = 3$ parallèles à ox et tangentes aux points

$$B(x = 0, y = -1) \qquad \text{et} \qquad C(x = -4, y = -3).$$

L'aire demandée est l'aire DCE comprise entre la courbe et la droite de

$$y = 3,5.$$

Elle est égale à

$$S = \int_3^{3,5} x_1\,dy - \int_3^{3,5} x_2\,dy,$$

x_1 et x_2 étant les deux valeurs de x fournies par la formule (4), on a donc

$$S = \int_3^{3,5} (y - 1)\sqrt{(y + 1)(y - 3)}\,dy.$$

En remarquant que $(y - 1)$ est la demi-dérivée de

la quantité placée sous le radical, on a

$$S = \tfrac{1}{4}\left[(x-1)(y-3)\right]^{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{3.5},$$

$$S = \tfrac{1}{4}(2,25)^{\frac{3}{2}}.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Les droites (D) forment la congruence des droites qui s'appuient sur deux droites fixes (Δ) et (Δ'). Les coordonnées du point a d'intersection de la droite (D) avec le plan

$$(p) \qquad\qquad z = -1,$$

sont

$$x = -v, \qquad y = u.$$

On peut donc substituer, sans rien changer d'essentiel dans l'énoncé, le point a au point A, car l'un se déduit de l'autre par une symétrie.

Fig. 2.

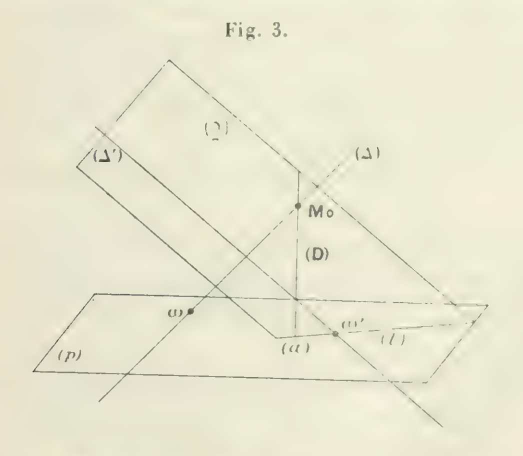
Soient alors (*fig.* 2) ω et ω' les points d'intersection des droites (Δ) et (Δ') avec le plan (p). Par tout point a

du plan (p) passe une droite (D) et une seule qui est l'intersection des plans a, (Δ) et a, (Δ'). Il y a exception lorsque a est en ω, auquel cas la droite (D) est indéterminée dans le plan (II) passant par ω et (Δ'), ou lorsque a est en ω', auquel cas (D) est indéterminée dans le plan (II') passant par ω' et (Δ).

Par un point M de l'espace il passe une droite (D) et une seule qui est l'intersection des plans M, (Δ) et M, (Δ'). Il y a exception lorsque M est situé sur une des deux droites (Δ) ou (Δ'), car, dans ce cas, la droite (D) est indéterminée dans le plan défini par M et l'autre droite fixe.

Soit M_0 un point de (Δ) (*fig.* 3). Toutes les droites (D) passant par M_0 engendrent le plan (Q)

Fig. 3.



passant par M_0 et (Δ'). Le lieu de la trace a de (D) sur le plan (p) est donc la trace (l) du plan (Q) sur (p). Ce lieu est donc une droite (l) passant par ω'. Inversement, lorsque le point a décrit la droite (l), la droite (D), qui n'est autre chose que aM_0, engendre le plan (Q). Il y a toutefois exception lorsque a est

en ω', car dans ce cas la droite (D) est indéterminée dans le plan (H'). La surface engendrée par (D) lorsque a décrit la droite (l) est donc l'ensemble des deux plans (Q) et (H').

On obtiendrait des résultats analogues pour un point M_0 de (Δ').

Supposons maintenant que le point a décrive dans le plan (p) une courbe algébrique (C) d'ordre m. La droite (D) engendrera une surface réglée (Σ) d'ordre $2m$. Pour le prouver, cherchons en combien de points une droite quelconque (S) rencontre la surface (Σ). Ce nombre sera égal à celui des droites (D) s'appuyant à la fois sur (S) et sur (C). Or, toutes les droites (D) qui s'appuient sur (S) forment en général un hyperboloïde à une nappe. Cet hyperboloïde est coupé par le plan (p) suivant une conique (Γ) qui rencontre la courbe (C) en $2m$ points. Les $2m$ droites (D) qui passent en ces $2m$ points rencontrent (S) aux $2m$ points d'intersection avec (Σ).

Cette surface (Σ) a 3 droites multiples d'ordre m qui sont (Δ), (Δ') et $\omega\omega'$.

En effet, par tout point M_0 de (Δ) il passe m génératrices de (Σ) qui sont les droites joignant M_0 aux m points d'intersection de la droite (l) (*fig.* 3) avec la courbe (C).

Lorsque M_0 décrit (Δ), les m génératrices engendrent m nappes de la surface (Σ) passant par (Δ).

Il y a de même m nappes passant par (Δ').

Imaginons que le point M_0, en décrivant (Δ), tende vers ω. La droite (l) aura pour limite $\omega\omega'$ et les m génératrices (D) de (Σ) passant par M_0 viendront se confondre suivant $\omega\omega'$. Il y a donc également m nappes passant par $\omega\omega'$.

Si la courbe (C) du plan (p) passe par ω, à ce point

correspond le plan (Π) et la surface (Σ) se décompose en une surface d'ordre $2m-1$ et ce plan.

Plus généralement, si la courbe (C) a en ω un point multiple d'ordre r et en ω′ un point multiple d'ordre r', la surface (Σ) se décompose en une surface réglée d'ordre $2m-r-r'$, r fois le plan (Π) et r' fois le plan (Π′).

En coupant la surface (Σ) par un plan, on obtient comme section une courbe algébrique d'ordre $2m$ qui a trois points multiples d'ordre m et passe par les m points d'intersection du plan sécant avec la courbe (C).

Dans le cas particulier en question, la courbe (C) est une parabole. La surface (Σ) est donc une surface du quatrième ordre ayant trois génératrices doubles (Δ), (Δ′) et ωω′.

La section par le plan xoy est une courbe du quatrième ordre ayant : deux points doubles à distance finie aux points d'intersection (A) et (B) de (Δ) et (Δ′) avec xoy, un point double à l'infini dans la direction ωω′ et tangente à la droite de l'infini dans la direction infinie de la parabole.

Lorsque la parabole passe par ω, la surface (Σ) se décompose en le plan (Π) et une surface du troisième ordre; la courbe du quatrième ordre se décompose en la parallèle à ωω′ passant par B et une cubique ayant : un point double en A, un point simple en B, un point simple à l'infini dans la direction ωω′ et tangente à la droite de l'infini dans la direction infinie de la parabole.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1906.

Deuxième composition de Mathématiques (Sciences I et II).

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

En supposant l'espace rapporté à un système de coordonnées rectangulaires OX, OY, OZ, *on considère la courbe définie par les équations*

$$y = 2x^3, \qquad z = x^4.$$

I. *Montrer que l'arc de cette courbe, compté à partir de l'origine des coordonnées jusqu'au point dont l'abscisse est le nombre positif* x, *est compris entre* $x + \frac{18}{5}x^5$ *et* $x + \frac{18}{5}x^5 + \frac{8}{7}x^7$ *pour les valeurs suffisamment petites de* x; *on prouvera que cet arc est toujours inférieur à la seconde limite, et qu'il est certainement supérieur à la première pour* $0 < x < \frac{2}{9}$.

II. *Montrer qu'il existe sur cette courbe une infinité de couples de points* A, B *tels que les plans* (P), (Q) *respectivement osculateurs à la courbe en* A, B *se coupent suivant la droite qui joint ces deux points.*

Soit V *l'angle (moindre que deux droits) des directions, perpendiculaires aux plans* (P), (Q), *qui font des angles aigus avec la direction positive sur l'axe des* z; *comment varie cet angle quand l'abscisse* x *du point* A *croît de* 0 *à* $+\infty$?

Calculer, à un demi-millième près, la valeur de x pour laquelle l'angle V est droit.

Montrer que les droites AB qui joignent deux points d'un même couple sont situées sur la surface dont l'équation est

$$Z = \frac{Y^2}{4X^2}.$$

Séparer cette surface en régions d'après le nombre de plans osculateurs à la courbe proposée qui passent par ses différents points.

III. *Évaluer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \tang \frac{V}{2}\, dx,$$

où V est la fonction de x qui a été définie plus haut.

I. L'arc de la courbe est donné par la formule

$$ds^2 = (1 + 36x^4 + 16x^6)\, dx^2.$$

En extrayant la racine carrée du polynome entre parenthèses, on trouve les identités :

$$(1) \qquad 1 + 36x^4 + 16x^6 = (1 + 18x^4)^2 + 4x^6(4 - 81x^2)$$

et

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + 36x^4 + 16x^6 \\ \quad = (1 + 18x^4 + 8x^6)^2 - x^8(324 + 288x^2 + 64x^4). \end{array} \right.$$

L'identité (1) prouve que, lorsque

$$4 - 81x^2 > 0,$$

c'ést-à-dire, lorsque (x positif)

$$x < \frac{2}{9},$$

on a

$$\frac{ds^2}{dx^2} > (1 + 18x^4)^2.$$

L'identité (2) montre que, quel que soit x, on a toujours

$$\frac{ds^2}{dx^2} < (1 + 18x^4 + 8x^6)^2;$$

on en conclut $\left(x < \frac{1}{9}\right)$,

$$1 + 18x^4 < \frac{ds}{dx} < 1 + 18x^4 + 8x^6$$

et, en intégrant de o à x,

$$x + \frac{18}{5}x^5 < s < x + \frac{18}{5}x^5 + \frac{8}{7}x^7.$$

II. L'équation du plan osculateur, en un point A de la courbe d'abscisse x, est

$$2x^3 X - 2xY + Z - x^4 = 0.$$

Écrivons qu'il passe par le point B de la courbe d'abscisse x' et nous obtenons la condition

$$(3) \qquad 2x^3 x' - 2xx'^3 + x'^4 - x^4 = 0.$$

Cette condition étant symétrique en x et x', prouve que, si le plan osculateur de A passe en B, réciproquement le plan osculateur de B passe en A. Les deux plans osculateurs se coupent donc suivant AB.

La relation (3) s'écrit

$$(x' - x)^3(x' + x) = 0$$

et, par suite, puisque $x' \neq x$, elle donne

$$x' = -x;$$

on en conclut

$$y' = -y, \qquad z' = z.$$

Les points A et B sont symétriques par rapport à Oz.

Les cosinus directeurs de la perpendiculaire au plan osculateur, A, en faisant avec Oz un angle aigu sont :

$$\frac{2x^3}{\sqrt{4x^6 + x^2 + 1}}, \qquad \frac{-x}{\sqrt{4x^6 + x^2 + 1}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{4x^6 + x^2 + 1}}.$$

Ceux de la perpendiculaire au plan osculateur B s'obtiennent en remplaçant x par $-x$.

On en conclut

$$\cos V = \frac{1 - x^2 - 4x^6}{1 + x^2 + 4x^6}.$$

Si l'on pose

$$u = x^2 + 4x^6,$$

on a

$$\cos V = \frac{1 - u}{1 + u}.$$

Quand x croît de o à $+\infty$, u croît évidemment de o à $+\infty$ et $\cos V$ décroît de 1 à -1. L'angle V croît donc de o à π.

La valeur de x pour laquelle V est droit est racine de l'équation

$$4x^6 + x^2 - 1 = 0.$$

Cette équation a une racine positive et une seule comprise entre o et 1.

En appliquant trois fois la méthode d'approximation de Newton, en partant de la valeur 1, on trouve

$$x = 0,7073.$$

Les équations de la droite AB sont

(4) $$Y = 2x^2 X, \qquad Z = x^3.$$

Quand x varie, la droite AB engendre un conoïde

dont on obtient l'équation en éliminant x entre les deux précédentes, ce qui donne bien

$$Z = \frac{Y^2}{4X^2}.$$

Écrivons que le plan osculateur en A passe par un point donné X, Y, Z de cette surface, nous obtenons l'équation du quatrième degré en x :

$$(5)\qquad 4X^2x^4 - 8X^3x^3 + 4X^2Yx - Y^2 = 0.$$

Cette équation admet évidemment pour racines les abscisses des points A et B de rencontre de la génératrice passant par le point X, Y, Z avec la courbe.

Ces abscisses sont données par la première des équations (4) :

$$(6)\qquad x^2 = \frac{Y}{2X}.$$

L'équation (5) se décompose alors ainsi

$$(2Xx^2 - 4X^2x + Y)(2Xx^2 - Y) = 0.$$

Les quatre racines sont donc : 1° celles qui sont fournies par (6) ; 2° celles qui sont racines de l'équation

$$(7)\qquad 2Xx^2 - 4X^2x + Y = 0.$$

Les deux racines de l'équation (6) sont réelles lorsque

$$XY > 0,$$

ce qui était à prévoir puisque cela a lieu pour tout point de la courbe donnée.

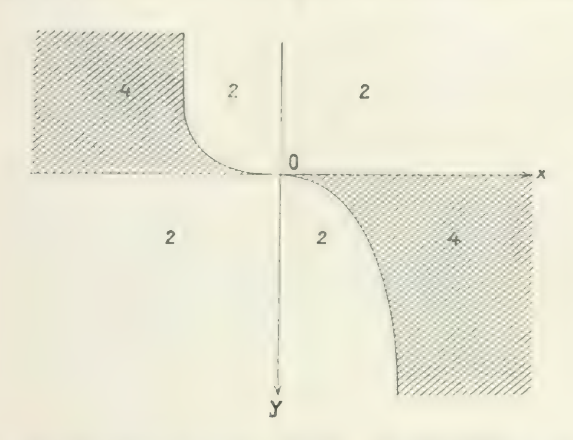
Les deux racines de l'équation (7) sont réelles lorsque

$$X(2X^3 - Y) > 0.$$

Construisons la parabole cubique

$$Y = 2X^3$$

dans le plan des xy. La figure ci-contre montre que,



par les points de la surface qui se projettent dans la région ombrée, passent *quatre* plans osculateurs réels et ailleurs *deux* plans. Or, la parabole cubique est la projection horizontale de la courbe donnée, et Ox est une génératrice de la surface. Par suite, par tous les points de la surface compris entre Ox et la courbe donnée passent *quatre* plans osculateurs et par tout autre point *deux* tels plans.

III. De la formule qui donne $\cos V$, on tire

$$u = \frac{1 - \cos V}{1 + \cos V} = \operatorname{tang}^2 \frac{V}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tang} \frac{V}{2} = \sqrt{u} = \sqrt{4x^4 + 1}\, x.$$

On a donc

$$J = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{tang} \frac{V}{2}\, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{4x^4 + 1}\, x\, dx.$$

Changeons de variable en posant $x^2 = z$.

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{4z^2+1}\, dz.$$

Cette intégrale bien connue (arc de parabole) donne

$$J = \left[\tfrac{1}{4} z\sqrt{4z^2+1} + \tfrac{1}{8} L\left(2z + \sqrt{4z^2+1}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}},$$

$$J = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{8} L(1+\sqrt{2}).$$

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

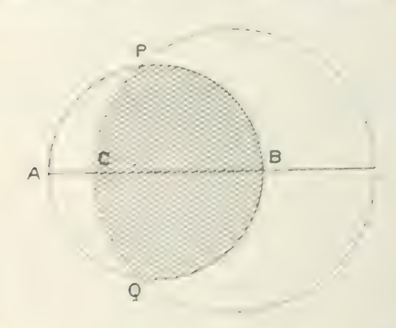
Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Définition des parallaxes pour les planètes :*

Parallaxes en : ascension droite, déclinaison, distance zénithale.

Indiquer rapidement les méthodes qui permettent d'obtenir les parallaxes planétaires par voie d'observation astronomique.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Pendant l'éclipse du 30 août 1905,*



à Bordeaux, et au moment de la plus grande phase,

les 0,930 du diamètre solaire apparent étaient éclipsés
$\left(\frac{BC}{AB} = 0,930\right)$.

A ce moment, le diamètre apparent du Soleil était de 31′41″,4; *celui de la Lune était de* 33′[illegible].

On demande de calculer avec trois décimales le rapport de la surface solaire apparente éclipsée à la surface solaire apparente totale. (Juillet 1906.)

Caen.

Épreuve théorique. — *On a des Tables donnant les coordonnées géocentriques du Soleil et de Mars à tous leurs passages au méridien de Paris pendant un grand nombre d'années. Montrer comment on peut déterminer la durée des révolutions sidérale et synodique de la planète et vérifier qu'elle satisfait aux deux premières lois de Képler.*

Épreuve pratique. — *Lors d'un passage du Soleil au méridien de Paris, l'heure sidérale est* H. *Calculer, pour cet instant, l'anomalie moyenne du Soleil et sa distance, en rayons terrestres, au centre de la Terre. La Terre étant supposée sphérique, calculer la variation de parallaxe pour* Æ *et* D *quand on passe des coordonnées géocentriques aux coordonnées locales.*

On donne (*numériquement*) *la latitude de Paris, l'heure* H, *la longitude du périgée, l'inclinaison de l'écliptique, l'excentricité de l'orbite solaire, la distance moyenne de la Terre au Soleil.* (Juillet 1906.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — *Aberration :*

1° *Influence sur les coordonnées équatoriales des étoiles. Aberration annuelle. Aberration diurne. Aberration lors du passage au méridien.*

2° *Influence sur les coordonnées écliptiques des étoiles. Aberration annuelle. Orbite annuelle d'aberration.*

Épreuve pratique. — *Calcul de l'anomalie vraie du*

Soleil et de sa longitude pour le 18 juillet 1906, à midi, temps moyen de Paris.

Calcul de la longitude moyenne du Soleil au 1er janvier 1906.

Données numériques :

Au 1er janvier 1810, à midi, temps moyen de Paris, on avait :

$$l_0 = 280°46'45'',$$

$$\varpi = 280°21'22''.$$

D'autre part, la variation de ϖ, par année tropique, est

$$\Delta\varpi = 1',018.$$

Enfin on a

$$n = 59',1385$$

et

$$e = 0,0167601.$$

(Juillet 1906.)

Paris.

Épreuve théorique. — 1° *Réfraction astronomique, pour les distances zénithales inférieures à 75° :*

2° *Détermination des ascensions droites avec l'instrument méridien. Corrections des observations.*

Épreuve pratique. — *Calculer à 1 minute près, en temps moyen astronomique de Paris, l'heure du coucher apparent de la Lune, à Paris, le 8 juillet* 1905.

La Connaissance des Temps *fournit les données suivantes :*

Latitude de Paris = $+48°50'11''$;

Parallaxe horizontale de la Lune = $59'$;

Réfraction horizontale = $34'$;

Si de plus on désigne à chaque instant par t le temps moyen de Paris, par H *l'angle horaire géocentrique du centre de la Lune par rapport au méridien de Paris, et par δ la déclinaison géocentrique du centre de la Lune, on a, au moment du passage supérieur au méridien de Paris à la date indiquée,*

$$t = 5^h 8^m 24^s, \qquad \delta = -1°34'37'' ;$$

enfin, au même moment, la variation de t pour 1 minute de H est de $+1^m 2^s,14$; *et la variation de* δ *pour 1 minute de H est* $-11'',94$.

On calculera avec quatre décimales.

(Juillet 1905.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Temps sidéral, temps vrai, temps moyen.*

Relations entre ces divers temps.

2° *Latitude. Détermination de la latitude.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Mercure décrit une orbite elliptique dans laquelle l'excentricité a pour valeur* 0,20560, *tandis que le demi-grand axe est égal à* 0,38710.

Calculer le rayon vecteur et l'anomalie vraie de Mercure, sachant que l'anomalie moyenne est de

$$252^\circ 8' 6'',5.$$

(Octobre 1905.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Exposer une méthode pour déterminer les éléments d'une planète dont on possède trois observations rapprochées.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soient à l'époque t, pour une planète (Vénus) :*

Longitude héliocentrique.....	$165^\circ 34' 20'',6$
Latitude....................	$+3^\circ 23' 36'',9$
Log du rayon vecteur........	$\bar{1},8569062$

et pour la même époque t :

Longitude du Soleil.........	$280^\circ 41' 4'',37$
Log du rayon vecteur........	$\bar{1},9926511$.

Calculer les coordonnées géocentriques de la planète : longitude, latitude, distance à la Terre.

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Exposer la suite des opéra-*

tions géodésiques concernant la mesure d'un arc de méridien.

2° *Développer l'expression de l'arc de méridien, supposé elliptique, en série ordonnée suivant les puissances croissantes de l'excentricité.*

3° *Indiquer comment on détermine les éléments de l'ellipsoïde terrestre au moyen d'un ensemble de mesures géodésiques.*

4° *Rappeler comment les géodésiens français ont opéré, à la fin du* XVIIIe *siècle, pour obtenir la valeur du quadrant, en vue de l'établissement du système métrique.*

Épreuve pratique — *Connaissant l'ascension droite et la déclinaison* δ *d'un astre ainsi que l'inclinaison de l'écliptique* ε, *calculer :*

1° *La longitude* λ *et la latitude* β *de cet astre ;*

2° *Les accroissements* $\Delta\lambda$ *et* $\Delta\beta$ *de la longitude et de la latitude correspondant à l'accroissement* $\Delta\varepsilon$ *de l'inclinaison de l'écliptique.*

Données numériques :

$$\alpha = 10^h\,38^m\,[illegible]$$

$$\delta = 11^\circ\,56'\,38'',9.$$

$$\varepsilon = 23^\circ\,27'\,7'',17.$$

$$\Delta\varepsilon = [illegible]\,10'',0.$$

(Juillet 1906.)

Montpellier.

Épreuve théorique. — *Sur la Terre supposée sphérique on considère un lieu* L *ayant pour coordonnées géographiques une longitude* λ *et une latitude* φ, *et une montagne ayant* λ' *et* φ' *pour coordonnées de même nature. Le sommet de cette montagne se trouve à une hauteur angulaire* η *au-dessus de l'horizon de* L.

A quel jour de l'année l'observateur placé en L *voit-il le Soleil se coucher derrière la montagne ?*

On indiquera la marche à suivre pour résoudre le problème en supposant :

1° *Que l'on possède des Tables donnant les coordonnées uranographiques du Soleil jour par jour ;*

2° *Que l'on ne possède aucune Table astronomique et*

que l'on connaît seulement les éléments du mouvement keplérien du Soleil, nécessaires à la résolution de la question.

On dira quels sont ces éléments.

Y a-t-il des conditions de possibilité ?

On montrera que l'heure vraie à laquelle le phénomène se produit est indépendante de toute théorie du mouvement du Soleil.

Épreuve pratique. — *On a, pour la planète Pallas :*

$$T = 1689^{\text{jours}},06$$
$$e = 0,2408$$

Calculer le temps qui s'écoule depuis le passage de la planète à son périphélie jusqu'au moment où son rayon vecteur est perpendiculaire au grand axe.

Note. — *On indiquera les formules à employer avant de commencer le calcul numérique.* (Juillet 1906.)

Rennes.

Épreuve théorique. — *Corrections de parallaxe. Ellipse de parallaxe annuelle.*

Épreuve pratique. — *Quelle est l'anomalie vraie du Soleil quand son anomalie excentrique est de 200°. Évaluer, en jours solaires moyens, l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre le dernier passage du Soleil au périgée et l'instant considéré.*

La durée de l'année est de $365^{\text{j m}},2422$; *l'excentricité de l'orbite solaire est égale à*

$$0,0167697.$$

(Juillet 1906.)

Toulouse.

Épreuve théorique. — I. *Le tourillon Ouest d'un cercle méridien est de* α'' *plus haut que le tourillon Est et son azimut compté à partir de la direction Ouest vers le Nord est de* β''. *Le cercle n'a d'ailleurs pas d'autre erreur.*

Chercher s'il peut exister des étoiles, dont l'ascension droite et la déclinaison, déterminées à l'aide de ce cercle, soient indépendantes de ces erreurs.

Trouver leurs distances polaires.

II. *On observe une même étoile durant toute une année. On déduit de ces observations un Tableau donnant la longitude apparente de l'étoile aux diverses époques des observations. En supposant que ces longitudes aient été corrigées de toutes les causes d'erreur sauf la parallaxe et l'aberration, on demande :*

1° *D'indiquer la marche à suivre pour s'assurer que les petites différences de ces longitudes sont bien dues à la parallaxe et à l'aberration;*

2° *De trouver dans ces différences la fraction qui provient de la parallaxe et celle qui provient de l'aberration.*

Note. — *On rappelle que les corrections en longitude de parallaxe et d'aberration sont de la forme*

$$\frac{p \sin(\odot - \lambda)}{\cos\beta} \qquad (\textit{parallaxe}),$$

$$-\frac{k \cos(\odot - \lambda)}{\cos\beta} \qquad (\textit{aberration}),$$

$\odot$ *désignant la longitude du Soleil,*
λ » » *de l'étoile,*
β » *la latitude de l'étoile.*

Épreuve pratique. — *Appliquer la méthode des moindres carrés au système suivant :*

$$
\begin{aligned}
- x + y - 9 &= 0,\\
-25x + 59y - 1475 &= 0,\\
15x - 14y - 210 &= 0,\\
5x - 4y - 100 &= 0,\\
27x + 19y - 2565 &= 0.
\end{aligned}
$$

Calculer les résidus et l'erreur moyenne.

(Juillet 1906.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2026.

(1905, p. 288).

Considérons une courbe plane du quatrième ordre avec un seul point double D ; *on sait que les six points de contact des tangentes menées à la courbe par le point double tombent sur une conique, et les points de contact* A, B *de cette conique avec ses tangentes issues de* D *appartiennent à la quartique.*

Cela posé, démontrer que, si l'on mène par les deux points A, B *une conique arbitraire qui coupera la quartique en six autres points, les droites qui unissent ces points à* D *coupent ultérieurement la quartique en six points d'une conique.* (V. Retali.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Prenons pour triangle de référence celui dont les sommets sont : le point double D et les points d'intersection des tangentes au point double avec la quartique.

L'équation de la courbe est alors

$$ax^3z + by^3z + xy\,f(xyz) = 0.$$

La cubique des points de contact des tangentes étant

$$ax^3 + by^3 + xy\,f'_z = 0.$$

Multiplions la deuxième équation par z et retranchons, il vient

$$xy[f(xyz) - zf'_z] = 0.$$

Donc les six points de contact sont situés sur la conique dont on a l'équation. La polaire de l'origine étant $z = 0$, les points A et B sont sur le côté du triangle de référence opposé à D.

L'équation d'une conique quelconque passant par A, B est

$$f(x, y, z) - zP = 0.$$

Soient xyz un point d'intersection et $x'y'z'$ le point cor-

respondant sur la quartique

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \theta\frac{z'}{z},$$

et l'on a

$$a x'^2 z + b y'^2 z + x'y' f(x', y', z') = 0,$$

$$\theta(a x'^2 z + b y'^2 z) + x'y' f(\theta x', \theta y', z) = 0,$$

$$f(\theta x', \theta y', z) + z P_{\theta x'} = 0.$$

Supprimons les accents, on a facilement

$$\theta f(x, y, z) - f(\theta x, \theta y, z) = 0,$$

$$f(\theta x, \theta y, z) - z P_{\theta x} = 0.$$

Soient

$$f(x, y, z) = A x^2 + B y^2 + C z^2 + D y z + E z x + F x y,$$

$$P \equiv L x + M y + N z,$$

il vient

$$\theta f(x, y, z) - z(L\theta x + M\theta y + N z) = 0,$$

$$\theta(A x^2 + B y^2 + F x y) - C z^2 = 0.$$

Éliminons θ, l'équation de la conique passant par les six points est

$$C[f(x, y, z) - z(L x + M y)] = N(A x^2 + B y^2 + F x y).$$

QUESTIONS.

2043. Le limaçon de Pascal, qui a pour équation en coordonnées polaires

$$\rho = 2 + \cos\omega,$$

est tel qu'il existe une infinité d'hexagones qui lui sont à la fois inscrits et circonscrits. R. B.

2044. On donne une ellipse inscrite à un triangle ABC et un point O sur cette courbe. Les droites OB, OC interceptent, sur une parallèle à la tangente en O, un segment de grandeur constante lorsque BC est déplacé en restant tangent à l'ellipse.

(Canon.)

[19b]

SUR LA DENSITÉ DES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS À UNE GRANDEUR DONNÉE;

PAR M. PAUL LÉVY.

Partons de la décomposition en facteurs premiers du produit $n!$ L'exposant d'un facteur premier α dans cette décomposition est

$$\left[\frac{n}{\alpha}\right]+\left[\frac{n}{\alpha^2}\right]+\left[\frac{n}{\alpha^3}\right]+\ldots,$$

$[x]$ désignant, d'après une notation de Gauss, la partie entière de x; le dernier terme non nul est le terme de rang $\left[\frac{\log n}{\log \alpha}\right]$. On peut donc écrire

$$(1)\qquad \log n! = \sum \log \alpha \left\{\left[\frac{n}{\alpha}\right]+\left[\frac{n}{\alpha^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{\alpha^{\left[\frac{\log n}{\log \alpha}\right]}}\right]\right\},$$

α représentant successivement tous les nombres premiers inférieurs à n.

Cherchons une valeur approchée du second membre.

Pour cela, remplaçons le coefficient de $\log \alpha$, que nous désignerons par A, par la valeur plus grande

$$(2)\qquad \frac{n}{\alpha}+\frac{n}{\alpha^2}+\ldots+\frac{n}{\alpha^{\left[\frac{\log n}{\log \alpha}\right]}}.$$

Les termes de cette somme sont en progression géométrique. Les p premiers ont pour somme

$$s_p = \frac{n}{\alpha}\,\frac{1-\frac{1}{\alpha^p}}{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

L'expression (2) s'obtient en donnant à p la valeur

$$p' = \left[\frac{\log n}{\log \alpha}\right];$$

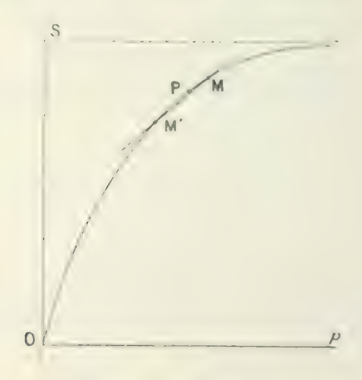
on augmentera une seconde fois A en remplaçant p' par la valeur plus grande

$$p'' = \frac{\log n}{\log \alpha},$$

puisque s_p croît avec p ; il vient ainsi

$$\mathrm{A} < \frac{n-1}{\alpha-1}.$$

Cherchons maintenant une limite de l'erreur commise. L'erreur commise dans la première approximation est inférieure au nombre p' des termes. L'erreur



commise dans la seconde est $s_{p''} - s_{p'}$; je dis qu'elle est inférieure à $p'' - p'$. Pour le voir, traçons la courbe représentant la variation de s_p en fonction de p. Figurons sur cette courbe les points M', P, M d'abscisses croissantes $p'' - 1$, p', p''. On a

$$s_p = s_{p-1} + \frac{n}{\alpha^p},$$

d'où

$$s_{p''} - s_{p'-1} - 1 = p'' - (p' - 1).$$

Le coefficient angulaire de la droite MM' est donc égal à l'unité. Celui de MP est alors inférieur à l'unité, et

$$s_{p''} - s_{p'} < p'' - p',$$

comme nous l'avons annoncé.

L'erreur commise sur la valeur de A est donc inférieure à

$$p' + (p'' - p') = \frac{\log n}{\log \alpha},$$

et l'on a

$$A < \frac{n-1}{\alpha - 1} < A + \frac{\log n}{\log \alpha},$$

d'où, en tenant compte de l'égalité (1), et en appelant ν le nombre des facteurs premiers distincts de $n!$

$$\log n! < \sum \frac{n-1}{\alpha-1} \log \alpha < \log n! + \nu \log n$$

ou

$$(3) \qquad \frac{\log n!}{n-1} < \sum \frac{\log \alpha}{\alpha - 1} < \frac{\log n!}{n-1} + \frac{\nu \log n}{n-1}.$$

L'on peut de cette inégalité déduire une valeur approchée de la densité des nombres premiers entre 0 et n. Il semble intuitif que l'expression $\sum \frac{\log \alpha}{\alpha - 1}$, dans laquelle α représente successivement tous les nombres premiers inférieurs à n, aura une valeur plus ou moins grande suivant que cette densité sera plus ou moins grande. Cependant, comme les nombres premiers sont en groupements plus denses dans le voisinage de certaines valeurs, il peut y avoir dans la somme surtout des termes de faibles valeurs, ou au contraire plus de termes plus grands, et le nombre des termes n'est pas

en rapport bien défini avec la valeur de la somme. Il importe donc de préciser ce raisonnement.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ la suite des nombres premiers rangés par ordre de grandeur; considérons, par une sorte d'inversion du problème, ν comme variable, et α_ν comme fonction inconnue. On peut, dans l'inégalité (3), remplacer n par α_ν. Il vient ainsi

$$(4) \qquad \frac{\log \alpha_\nu !}{\alpha_\nu - 1} < \sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{\log \alpha_i}{\alpha_i - 1} < \frac{\log \alpha_\nu !}{\alpha_\nu - 1} + \frac{\nu \log \alpha_\nu}{\alpha_\nu - 1}.$$

Essayons de voir si une suite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$ de croissance plus rapide que la suite des α, et telle que

$$\beta_\nu > \alpha_\nu,$$

satisfait à cette inégalité. Les β peuvent d'ailleurs n'être pas entiers, on remplace alors $\beta!$ par la fonction eulérienne $\Gamma(1 + \beta)$.

La fonction $\frac{\log \Gamma(x+1)}{x-1}$, qui ne diffère de $\log x$ que d'une grandeur, ne devenant pas infinie avec x, croît avec x, à partir d'une certaine valeur de x, tandis que $\frac{\log x}{x-1}$ décroît. Il s'ensuit que, si l'on remplace les α par les β, sans changer la valeur de ν, les membres extrêmes de l'inégalité (4) augmentent et le second membre diminue. Il pourra alors se faire que la première partie de l'inégalité ne soit plus vérifiée; cela pourrait au contraire avoir lieu pour la seconde si la croissance des β n'était pas assez rapide. On voit ainsi comment l'on saura si une suite arbitrairement formée est de croissance trop rapide ou trop lente.

La série dont le terme général est $\frac{1}{\alpha}$ est divergente. D'autre part, le rapport $\frac{\alpha_\nu}{\nu}$ devient infini avec ν. Ces ré-

sultats s'établissent aisément, et nous les supposerons connus. L'idée la plus naturelle est donc de poser, pour le premier essai,

$$\beta_\nu = \nu \log \nu.$$

Introduisons un paramètre λ et posons

$$\beta_\nu = \lambda \nu \log \nu.$$

Proposons-nous de calculer les quantités qui figurent dans l'inégalité (4) avec des erreurs ne devenant pas infinies. On peut alors remplacer $\frac{\log \Gamma(\beta_\nu - 1)}{\beta_\nu - 1}$ par $\log \beta_\nu$ (¹); on peut alors remplacer $\frac{\log \beta_i}{\beta_i - 1}$ par $\frac{\log \beta_i}{\beta_i}$, la différence $\frac{\log \beta_i}{\beta_i(\beta_i - 1)}$ étant le terme général d'une série convergente, puisque $\beta_i > i$; $\sum \frac{\log \beta_i}{\beta_i}$ peut à son tour être remplacé par $\int^\nu \frac{\log \beta_\nu}{\beta_\nu} d\nu$. Le premier membre de l'inégalité (4) devient alors

$$\log \nu - \log \log \nu - \log \lambda;$$

le troisième n'en diffère que d'une quantité finie. Le second devient

$$\int^\nu \frac{d\nu}{\lambda\nu} - \int \frac{\log \log \nu}{\lambda \nu \log \nu} d\nu - \int^\nu \frac{\log \lambda \, d\nu}{\lambda \nu \log \nu}$$

ou

$$\frac{1}{\lambda} \log \nu - \frac{1}{2\lambda} (\log \log \nu)^2 - \frac{\log \lambda}{\lambda} \log \log \nu.$$

On en déduit que, pour $\lambda > 1$, la première partie de l'inégalité (4) n'étant pas vérifiée, l'on a un mode de croissance trop rapide. Le contraire a lieu pour $\lambda = 1$.

(¹) On peut remarquer que $\log \beta_\nu$ devient infini pour $\nu = 1$. Mais il est évident que le raisonnement subsiste tout de même.

On est donc conduit à poser en second lieu

$$\beta_\nu = \nu[\log\nu + \varphi(\nu)],$$

$\varphi(\nu)$ étant une fonction de croissance moins rapide que $\log\nu$, et que nous supposerons au plus de l'ordre de grandeur de $\log\log\nu$.

La valeur approchée du premier et du troisième membre est toujours

$$\log\nu + \log\log\nu.$$

Cherchons celle du second membre. On a

$$\frac{1}{\beta_\nu} = \frac{1}{\nu\log\nu}\left\{1 - \frac{\varphi(\nu)}{\log\nu} + \left[\frac{\varphi(\nu)}{\log\nu}\right]^2 - \ldots\right\}$$

et

$$\log\beta_\nu = \log\nu + \log\log\nu + \log\left[1 + \frac{\varphi(\nu)}{\log\nu}\right]$$

$$= \log\nu + \log\log\nu + \frac{\varphi(\nu)}{\log\nu} \cdots,$$

d'où

$$\frac{\log\beta_\nu}{\beta_\nu} = \frac{1}{\nu} + \frac{\log\log\nu - \varphi(\nu)}{\nu\log\nu} + \ldots;$$

les principaux termes non écrits contiennent au dénominateur $\nu(\log\nu)^2$, et les numérateurs, d'après l'hypothèse faite sur $\varphi(\nu)$, sont au plus de l'ordre de grandeur de $(\log\log\nu)^2$; ces termes croissent donc moins rapidement que $\frac{1}{\nu(\log\nu)^{1+\sigma}}$, σ étant compris entre 0 et 1. Leur intégrale est donc convergente pour ν infini, et le second membre peut s'écrire, en ne négligeant aucune partie infinie,

$$(5) \qquad \log\nu + \int^\nu \frac{\log\log\nu - \varphi(\nu)}{\nu\log\nu}\,d\nu.$$

Si nous posons

$$\varphi(\nu) = \log\log\nu - 1,$$

valeur qui justifie l'hypothèse faite *a priori* sur $\varphi(\nu)$, nous obtenons pour le second membre $\log\nu + \log\log\nu$. La suite des β ainsi formée vérifie alors l'inégalité (4), à condition d'ajouter des constantes convenablement choisies aux membres extrêmes. Il ne peut en être de même d'aucune autre suite formée en ajoutant à $\varphi(\nu)$ une fonction de signe constant et constamment supérieure en module à un nombre fixe ρ, car alors la valeur approchée (5) du second membre se trouve augmentée ou diminuée d'une quantité supérieure à

$$\rho\int\frac{d\nu}{\nu\log\nu} = \rho\log\log\nu,$$

c'est-à-dire devenant infinie.

On peut donc admettre que la suite

$$\beta_2,\quad \beta_3,\quad \ldots,\quad \beta_\nu = \nu(\log\nu + \log\log\nu - 1)$$

donne une idée approchée de la croissance des nombres premiers. Par inversion de cette formule, les expressions

$$\frac{n}{\log n - 1}\quad \text{ou}\quad \frac{n}{\log n} + \frac{n}{(\log n)^2}$$

peuvent être prises comme valeurs approchées du nombre d'entiers premiers inférieurs à n.

Riemann a donné pour cette même grandeur la valeur

$$Li(x) - \frac{1}{2}Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \ldots + (-1)^m\frac{1}{m}Li\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

$Li(x)$ désignant le logarithme intégral $\int\frac{dx}{\log x}$, et en prenant pour m tous les nombres entiers qui ne sont multiples d'aucun carré parfait.

Les termes les plus importants de $Li(x)$, qui sont aussi les plus importants de la fonction définie par ce

développement, sont

$$\frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \ldots.$$

Ce sont ces deux premiers termes que nous venons de retrouver par une méthode relativement élémentaire.

[$L^1$1b]

NOTE SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE INVERSE D'UNE DROITE OS PAR RAPPORT À UN TRIANGLE ABC ET SUR LE TRIANGLE PÉDAL DU POINT S;

Par M. A. VACQUANT.

Cette Note peut faire suite à un article de M. G. Fontené, complété par un article de M. R. B. (*N. A.*, 1906, p. 55 à 61). En conservant les notations de M. Fontené, on peut énoncer la question de la façon suivante :

Soit DEF *le triangle pédal relatif au point* S *et au triangle* ABC *inscrit dans le cercle de centre* O ; *soient* M, N, P *les milieux des côtés du triangle* ABC ; *soient* a, b, c *les intersections des droites* NP *et* EF, PM *et* FD, MD *et* DE, *les trois droites* Da, Eb, Fc *concourent en un même point* K′ *qui reste le même quand le point* S *décrit une droite* OΔ. *Si* S_1 *et* S_2 *sont les points de rencontre de* OΔ *avec le cercle* O *circonscrit au triangle* ABC, K′ *est le point de rencontre des droites de Simson* Δ_1 *et* Δ_2 *relatives à* S_1 *et* S_2, *et* K′ *est le centre de l'hy-*

perbole équilatère inverse de OΔ *par rapport au triangle* ABC.

Quand le point S décrit la droite OΔ, la droite DE enveloppe une parabole tangente aux droites CA, CB et MN, car les divisions D et E, semblables à la division S, sont semblables, et, quand S vient en O, DE devient MN. La tangente variable DE à cette parabole détermine sur les tangentes fixes MN et BC des divisions homographiques e et D qui sont semblables. D'autre part, les divisions F et D sont semblables, comme semblables à la division décrite par S sur OΔ; les divisions F et e, semblables à la division D, sont semblables, et comme les droites BA et MN décrites respectivement par les points F et e sont parallèles, la droite Fe passe par un point fixe K'. En supposant le point S en S_1 ou S_2 sur le cercle circonscrit au triangle ABC, les points correspondants D_1, E_1, F_1 sont en ligne droite, ainsi que D_2, E_2, F_2; ces deux droites Δ_1 et Δ_2, étant les droites de Simson relatives à deux points S_1 et S_2 diamétralement opposés du cercle O, sont rectangulaires. Le point K' est donc le point d'intersection des droites de Simson Δ_1 et Δ_2. On verrait de même que les droites Eb et Da passent par K' quand S décrit OΔ. Donc Da, Eb, Fe concourent en K'.

Je dis maintenant que K' est le centre de l'hyperbole équilatère inverse de OS. Pour le voir, considérons l'hyperbole équilatère γ_1 définie par ses asymptotes $K'\Delta_1$, $K'\Delta_2$ et le point A. Comme N est le milieu de E_1E_2 et de AC, cette hyperbole passera par C; de même, elle passera par B; étant circonscrite au triangle ABC, elle passera par l'orthocentre H de ce triangle. D'autre part, la conique γ_{11}, inverse de la

droite $O\Delta$, passe par A, B, C et H, car H est l'inverse de O ; c'est donc une hyperbole équilatère, comme on le voit autrement en remarquant que les directions asymptotiques de γ_{1} sont Δ_1 et Δ_2, car, si S' est l'inverse de S, on sait que AS' est perpendiculaire à EF ; quand S vient en S_1, son inverse S'_1 est à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite E_1F_1 ou Δ_1, c'est-à-dire dans la direction Δ_2 ; de même, quand S vient en S_2, S'_2 est à l'infini dans la direction Δ_1. Les hyperboles équilatères γ et γ_{1}, ayant quatre points communs A, B, C, H et mêmes directions asymptotiques, coïncident.

Enfin, on sait que le point K' appartient à la fois au cercle circonscrit au triangle MNP et au cercle circonscrit au triangle DEF ; généralement, on peut dire que les cercles circonscrits aux triangles tels que DEF passent par le point fixe K' quand S décrit $O\Delta$. En particulier, cette importante propriété du point K' a été démontrée élémentairement par M. R. B. dans l'article déjà cité (*N. A.*, 1906, p. 59).

[R2b, R9b]

SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ ;

Par M. J. JUHEL-RENOY.

Nous nous appuierons sur les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le centre de gravité de la surface d'un triangle coïncide avec le centre de gravité de trois masses égales appliquées aux trois sommets du triangle.*

Théorème II. — *Le centre de gravité d'un tétraèdre coïncide avec le centre de gravité de quatre masses égales appliquées aux quatre sommets du tétraèdre.*

CENTRE DE GRAVITÉ DES SURFACES.

1. *Trapèze.* — Si B et b désignent les bases du trapèze, son centre de gravité coïncide avec le centre de gravité des masses $B - b$, b, $B + b$, B, respectivement appliquées aux sommets du trapèze. Ces masses se composent en trois, $2b$, $2B$ et $B - b$, respectivement appliquées aux milieux des deux bases et au point de concours des diagonales. Donc le centre de gravité du trapèze est sur la droite qui joint les milieux des deux bases.

D'ailleurs, les deux masses b et $b - B$, appliquées aux sommets de la base supérieure, ont pour résultante $2b + B$; les deux masses B et $b + B$, appliquées aux sommets de la grande base, ont pour résultante $2B - b$; le centre de gravité du trapèze partage donc la droite qui joint les milieux des deux bases dans le rapport $\frac{2B - b}{2b - B}$.

On verrait, de même, en considérant deux à deux les triangles adjacents à chaque diagonale, que le centre de gravité coïncide avec le centre de gravité de deux masses $B - 2b$ appliquées aux sommets de la petite base et de deux masses $b - 2B$ appliquées aux sommets de la grande base et que, par suite, le centre de gravité du trapèze coïncide avec le centre de gravité de trois masses b, B et 4σ (σ étant la longueur de la section moyenne), respectivement appliquées au centre de gravité de ces trois longueurs.

II. *Quadrilatère.* — Le centre de gravité coïncide avec le centre de gravité de quatre masses P, P + p, p, P + p, respectivement appliquées aux quatre sommets A, B, C, D, de sorte que, O désignant le point de concours des diagonales, si l'on porte sur CA une longueur CK = OA et sur DB une longueur DM = OB, le centre de gravité du quadrilatère se confond avec le centre de gravité du triangle BKD et du triangle ACM. Par les milieux I et J de chaque diagonale, AC et DB, menons une parallèle à l'autre, ces deux droites se rencontrent en un point P; le centre de gravité est le point de rencontre des droites JK et MI et, par suite, se confond avec le centre de gravité du triangle PIJ.

Remarquons encore que le centre de gravité coïncide avec le centre de quatre forces P + p parallèles, appliquées aux quatre sommets du quadrilatère et d'une force — (P + p) appliquée au point O. On peut donc dire que le centre de gravité du quadrilatère se trouve sur la droite qui joint le point de rencontre des diagonales au centre des moyennes distances des quatre sommets et partage cette droite en deux segments soustractifs dans le rapport $\frac{4}{1}$.

Soient A, B, C, D les quatre sommets du quadrilatère auxquels nous venons d'appliquer respectivement les forces

$$P + p, \qquad p = P + p - P, \qquad P + p, \qquad P = P + p - p.$$

Les deux forces P + p, appliquées en A et B, donnent une résultante, égale à leur somme, appliquée au milieu de AB, qu'on peut remplacer par deux forces égales à P + p, appliquées en O, et au point M' d'intersection des parallèles menées par A et B aux diagonales du quadrilatère; les deux forces — P et — p, relatives aux sommets B et D, se composent en une force

$-(P+p)$ appliquée en O; le centre de gravité se confond donc avec celui du triangle CDM′ et, par suite, en désignant par M le milieu de CD, il est au tiers de MM′ à partir de M.

Ce théorème et le précédent sont de M. Caspary.

Il serait curieux de comparer, au point de vue de la simplicité, par les méthodes de M. Lemoine, les constructions précédentes et celle que l'on donne, dans les traités de Mécanique, pour la recherche du centre de gravité du quadrilatère.

III. *Pentagone*. — Soit ABCDE un pentagone dans lequel la diagonale BE détermine le triangle ABE dont le centre de gravité coïncide avec le centre de trois forces p parallèles appliquées en A, B, E et le quadrilatère BCDE dont le centre de gravité coïncide avec le centre de quatre forces P appliquées aux quatre sommets et d'une force $-P$ appliquée au point de concours O des diagonales. On en déduit que, M désignant le milieu de CD et Q le milieu de AO, la droite MQ est parallèle à la droite joignant le centre de gravité du triangle ABE au centre de gravité du pentagone. On a ainsi cinq droites passant par le centre de gravité du pentagone.

On peut aussi procéder de la manière suivante :

Soit ABCDE un pentagone que l'on partage en trois triangles AED, ADC, ACB ayant respectivement pour masses m_1, m_2, m_3, ces masses étant proportionnelles aux aires des triangles correspondants. On a donc, aux sommets A, B, C, D, E, les masses respectives

$$m_1+m_2+m_3, \quad m_3, \quad m_2+m_3, \quad m_1+m_2, \quad m_1.$$

Les deux masses, appliquées en E et C, pourront être remplacées par une masse $m_1+m_2+m_3$ appliquée

en un point R de CE, tel que

$$\frac{RE}{CR} = \frac{\text{aire ABCD}}{\text{aire ADE}},$$

de sorte que, si par B on mène la parallèle à AC qui rencontre CD en N, si l'on joint NE qui rencontre AD en Q et si l'on prend sur NE, dans le sens NE, une longueur NI = QE, on aura

$$\frac{RE}{CR} = \frac{\text{aire ADN}}{\text{aire ADE}} = \frac{NQ}{QE} = \frac{IE}{NI}.$$

Par suite, le point R est sur la parallèle à CD menée par I.

On verrait de même que les masses, appliquées en B et D, peuvent être remplacées par une masse

$$m_1 + m_3 + m_4,$$

appliquée en un point M de BD obtenu en prenant le point d'intersection H de CD et de la parallèle menée par E à AD, en joignant HB qui rencontre AC en P, en prenant sur HB, dans le sens HB, une longueur HK = PB et en menant par K la parallèle à DC qui rencontre BD en M.

Il en résulte que le centre de gravité du pentagone coïncide avec le centre de gravité du triangle AMB.

CENTRE DE GRAVITÉ DES VOLUMES.

I. *Tronc de pyramide.* — En partant d'un sommet de la base supérieure, on peut décomposer le tronc en trois pyramides ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour base respectivement la grande base B, la petite base b et la moyenne proportionnelle entre les deux

bases $\beta = \sqrt{Bb}$. En répétant cette décomposition pour chacun des trois sommets de la base supérieure et en désignant par σ l'aire de la section moyenne

$$\sigma = \frac{B + b + 2\beta}{4},$$

on est conduit à placer à chaque sommet de la base supérieure une masse $2\sigma + b$ et, à chaque sommet de la base inférieure, une masse $2\sigma + B$.

Il en résulte que le centre de gravité du tronc de pyramide se trouve sur la droite qui joint les centres de gravité des deux bases et s'obtient en prenant le centre de gravité de trois masses, égales respectivement aux aires des deux bases et à quatre fois l'aire de la section moyenne et appliquées aux centres de gravité de ces aires.

On peut trouver, de la manière suivante, le rapport des distances du centre de gravité aux deux bases.

En décomposant le tronc de pyramide en trois pyramides, ayant respectivement pour base B, b et $\beta = \sqrt{Bb}$, on est conduit à placer, aux trois sommets de la base supérieure, des masses

$$b, \quad b + \beta, \quad b + \beta + B$$

et, aux trois sommets de la base inférieure, des masses

$$b + \beta + B, \quad B + \beta, \quad B.$$

Le rapport des distances du centre de gravité à la petite base et à la grande base est donc égal à

$$\frac{3B + b + 2\sqrt{Bb}}{B + 3b + 2\sqrt{Bb}}.$$

Signalons enfin la construction suivante :

Soient A, B, C les sommets de la base supérieure

auxquels sont placées les masses

$$b, \quad b + \beta, \quad b + \beta + B$$

et, dans le même ordre, D, E, F les sommets de la base inférieure auxquels sont appliquées les masses

$$B + b + \beta, \quad B + \beta, \quad B.$$

Si sur EA, dans le sens EA, on porte une longueur EM = IA, I étant le point d'intersection des diagonales du trapèze ABED, le centre de gravité du tronc est sur la droite joignant les centres de gravité des deux pyramides MBCD et CDEF.

II. *Tronc de prisme triangulaire.* — En désignant par a, b, c les longueurs des trois arêtes, on place, aux extrémités de chacune de ces arêtes et dans chaque base respectivement, les masses

$$\begin{array}{ccc} a+b+c, & b+c, & c, \\ c, & a+b, & a+b+c. \end{array}$$

En répétant la décomposition du tronc de prisme en trois pyramides pour deux sommets différents de la base supérieure, on est conduit à placer, aux extrémités de chaque arête a, b, c et dans chaque base respectivement, les masses

$$\begin{array}{ccc} a+b+c+a, & b+c+b+a, & c+c+b+a, \\ a+c+b+a, & a+b+c+b, & a+b+c+c, \end{array}$$

qui se composent deux à deux au milieu des arêtes.

On voit donc que le centre de gravité du tronc de prisme triangulaire se confond avec le centre de gravité de quatre masses égales aux longueurs des arêtes et au triple de leur somme, appliquées respectivement au milieu de chaque arête et au centre de gravité de leur triangle.

Il en résulte que, si G est le centre de gravité d'un triangle de base et si M est le centre de trois forces parallèles égales aux arêtes et appliquées respectivement aux trois sommets de la base, la parallèle menée par le centre de gravité du tronc de prisme aux arêtes perce le plan de base en un point P, situé au quart de GM à partir de G; le centre de gravité du tronc de prisme se trouve au milieu de la droite qui joint les points P et P′ relatifs aux deux bases du tronc.

III. *Tronc de parallélépipède.* — En menant un plan diagonal, on détermine deux troncs de prisme triangulaires dont les bases sont égales. Les volumes des pyramides, dans lesquelles on les décompose, sont donc proportionnels aux longueurs des arêtes a, b, c, d.

On aura donc, aux sommets de la section moyenne, par une première décomposition, les masses

$$a + b + c + a + a + d + c + a,$$

$$a + b + c + b,$$

$$a + b + c + c + a + d + c + c,$$

$$a + d + c + d$$

et, par une seconde décomposition, les masses

$$a + b + d + a,$$

$$a + b + d + b + b + c + d + b,$$

$$b + c + d + c,$$

$$a + b + d + d + b + c + d + d.$$

En additionnant les masses correspondantes, on trouve, pour chaque sommet de la section moyenne,

$$4a + 2(a + b + c + d),$$

$$4b + 2(a + b + c + d),$$

$$4c + 2(a + b + c + d),$$

$$4d + 2(a + b + c + d).$$

Le centre de gravité du tronc se confond donc avec le centre de gravité de cinq masses, proportionnelles aux longueurs des arêtes et au double de leur somme, placées respectivement au milieu de chaque arête et au centre du parallélogramme formé par ces milieux.

Il en résulte que, si G est le centre d'un parallélogramme de base ABCD et si M est le centre de quatre forces parallèles, égales aux arêtes, appliquées respectivement aux quatre sommets A, B, C, D, la parallèle, menée par le centre de gravité du tronc aux arêtes, perce le plan ABCD en un point P, au tiers de GM à partir de G.

En d'autres termes, le centre de gravité du tronc se trouve au milieu de la droite qui joint les deux points P, P' qui correspondent aux deux bases.

IV. *Polyèdre.* — Soit un polyèdre, ayant pour bases deux triangles situés dans des plans parallèles et dont les faces sont des trapèzes. En désignant par B, b, σ respectivement l'aire des deux bases et de la section moyenne, et par H la hauteur, son volume est exprimé par la formule

$$V = \frac{H}{6}(B + b + 4\sigma)$$

qu'on peut écrire

$$\frac{H}{3}B + \frac{H}{3}b + \frac{H}{3}\left(2\sigma - \frac{B + b}{2}\right)$$

ou, en posant $2\sigma - \frac{B+b}{2} = \zeta$,

$$V = \frac{H}{3}(B + b + \zeta).$$

Le volume est donc équivalent à la somme de trois

pyramides ayant pour hauteur la hauteur du solide et pour bases respectives B, b, β.

On aura donc, comme pour le tronc de pyramide, aux sommets de la base supérieure, trois masses

$$3b + B + 2\beta = 4\sigma + 2b$$

et, aux sommets de la base inférieure, trois masses

$$3B + b + 2\beta = 4\sigma + 2B,$$

c'est-à-dire que le centre de gravité d'un tel polyèdre est le centre de gravité de trois masses B, b et 4σ appliquées respectivement aux centres de gravité des trois triangles correspondants.

C'est, d'ailleurs, un théorème bien connu, que M. Darboux a étendu au centre de gravité du segment à deux bases, compris entre deux sections parallèles d'une surface réglée.

CENTRES DE PERCUSSION.

I. *Triangle.* — Soient ABC, DEF les deux bases d'un tronc de prisme dont les plans se coupent suivant la droite yy'; si l'on se reporte à la recherche du centre de gravité du tronc de prisme, le point que nous avons appelé P est le centre de percussion du triangle ABC par rapport à la droite d'intersection yy' des deux bases du tronc.

On sait que les moments et le produit d'inertie d'un triangle, par rapport à deux droites orthogonales de son plan, s'obtiennent en considérant la masse du triangle, comme condensée en trois masses égales, appliquées respectivement aux milieux des côtés du triangle.

Le produit d'inertie par rapport à deux droites orthogonales xx', yy' du plan du triangle, en remarquant que les x des points A, B, C sont proportionnels à a, b, c, devant être nul, on aura

$$\sum (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) = 0$$

ou

$$3(a + b + c)Y - a y_1 - b y_2 - c y_3 = 0.$$

Donc la droite Ox doit passer par le point P pour que le produit d'inertie soit nul. Le point O, projection du point P sur yy', est donc le point pour lequel cette droite est axe principal d'inertie par rapport au triangle. On démontrera donc que P est le centre de percussion si le moment d'inertie du triangle est égal à

$$S \times GQ \times PO,$$

G étant le centre de gravité du triangle et Q sa projection sur yy'.

Or

$$GQ = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$PO = \frac{a x_1 + b x_2 + c x_3 - (a + b + c)(x_1 + x_2 + x_3)}{3(a + b + c)}.$$

Il faut donc prouver que

$$\frac{1}{12}\frac{x_1 + x_2 + x_3}{a + b + c}\left[a x_1 + b x_2 + c x_3 - (a + b + c)(x_1 + x_2 + x_3)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\sum (x_1 - x_2)^2$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sum x_1^2 - \sum x_1 x_2\right)$$

ou, en remplaçant x_1, x_2, x_3 par les quantités propor-

tionnelles a, b, c.

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2 \\
&\quad = 2(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc),
\end{aligned}
$$

ce qui est une identité.

Donc le centre de gravité du tronc de prisme se trouve au milieu de la droite qui joint les centres de percussion des deux bases par rapport à la droite d'intersection de leurs plans.

Théorème. — *Soient* ABC *la base d'un prisme et* yy' *une droite de son plan. Si l'on mène par cette droite un plan qui coupe le prisme suivant le triangle* DEF, G *désignant le centre de gravité du triangle* ABC *et* M *le centre de trois forces parallèles* AD, BE, CF *appliquées en* A, B, C *et égales aux arêtes du tronc :*

1° *Le point* P *situé au quart de* GM *à partir de* G *est le centre de percussion du triangle par rapport à la droite;*

2° *Le point* O, *projection de* P *sur la droite, est le point pour lequel la droite est axe principal d'inertie;*

3° *Le carré du rayon de giration est égal à la puissance du point* O *par rapport au cercle qui a* GP *pour diamètre;*

4° *Le centre de gravité du tronc de prisme se trouve au milieu de la parallèle menée par* P *aux arêtes et limitée aux deux bases du tronc.*

En particulier, le centre de percussion d'un triangle par rapport à une parallèle à un côté, menée par un sommet, est sur la médiane issue de ce sommet, au quart de cette médiane à partir du côté opposé, et le centre de percussion d'un triangle

par rapport à un côté est au milieu de la médiane issue du sommet opposé.

II. Un calcul tout semblable fournit un théorème analogue dans le cas du tronc de parallélépipède. En particulier, le centre de percussion d'un parallélogramme par rapport à un des côtés est au tiers de la ligne médiane à partir du côté opposé, et le centre de percussion par rapport à une parallèle à une diagonale passant par un sommet est, à partir du sommet, aux $\frac{7}{12}$ de la diagonale issue de ce sommet.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1906).

Sujets des compositions.

Mathématiques élémentaires.

1° Étant donné un triangle ABC ayant pour côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; trouver, dans le plan de ce triangle, le lieu du point M tel que

$$(1) \qquad \pm a.\overline{MA}^2 \pm b.\overline{MB}^2 \pm c.\overline{MC}^2 = abc,$$

en prenant toutes les combinaisons de signe possibles.

2° Le lieu correspondant à l'équation

$$b.\overline{MB}^2 + c.\overline{MC}^2 - a.\overline{MA}^2 = abc$$

est un cercle S_A. On trouverait de même un cercle S_B et un cercle S_C. On considère tous les triangles ABC inscrits à un cercle donné et circonscrits à un deuxième cercle donné et intérieur au premier : Calculer la somme

$$\frac{1}{\rho_A^2} + \frac{1}{\rho_B^2} + \frac{1}{\rho_C^2},$$

ρ_A, ρ_B, ρ_C désignant les rayons des cercles S_A, S_B, S_C.

3° Calculer les puissances des sommets A, B, C et des centres des cercles inscrits et exinscrits au triangle ABC par rapport au cercle S_A. Déterminer les points d'intersection de ce cercle S_A et des côtés du triangle ABC.

4° Si les sommets B, C restant fixes le rapport $\frac{AB}{AC}$ demeure invariable, le cercle S_A est orthogonal à un cercle fixe.

5° On donne le cercle S_A, le cercle exinscrit au triangle ABC et situé dans l'angle A, ainsi que le point de contact de ce cercle et du côté BC. Trouver l'enveloppe de la droite joignant les points de contact de ce cercle exinscrit et des côtés AB, AC.

6° Lieu du point M vérifiant l'une des équations (1) quand ce point n'est plus assujetti à rester dans le plan ABC.

Mathématiques spéciales.

I. On considère la courbe dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires,

$$(x^2+y^2)^2 - ax(x^2-y^2) - a^2y^2 = 0,$$

et l'on demande d'exprimer x et y en fonctions rationnelles d'un paramètre, de construire la courbe et de trouver les relations qui lient les valeurs de ce paramètre correspondant à quatre points situés, soit sur un cercle ne passant pas par l'origine, soit sur une droite passant par l'origine.

II. Soient M_1 le point où le cercle osculateur en un point M rencontre de nouveau la courbe, M_2 le point où le cercle osculateur en M_1 rencontre de nouveau la courbe, etc.; démontrer que, si quatre points M sont une droite D, les points M_1 correspondants sont, en général, sur un cercle orthogonal à un cercle fixe, si D varie. Si les points M_1 sont sur une droite D_1, les points M_2 sont sur une droite D_2, et ainsi de suite; trouver la position limite des droites D, D_1, D_2, ...

Si quatre points M sont sur un cercle C, les points M_1 correspondants sont, en général, sur un cercle C_1; démontrer que, s'ils sont sur une droite, il existe deux points fixes P

et P d'où l'on voit sous un angle droit les segments déterminés sur Oz par les cercles C. Dans le cas général, les points M_2 sont sur un cercle C_2, etc. ; quelles conditions doit remplir le cercle C pour que les points M_1 soient sur une droite ; dans l'hypothèse où tous les points obtenus successivement sont sur des cercles C_1, C_2, ..., trouver vers quelles limites tendent les puissances, par rapport à ces cercles, des points de la courbe situés sur Oz, en déduire la limite de ces cercles.

III. Trouver le lieu d'un point A tel que quatre des points de contact des tangentes issues de ce point soient sur un cercle Γ ; quel est le nombre des tangentes réelles menées de A ?

Démontrer que le cercle Γ est orthogonal à un cercle fixe et trouver le lieu de son centre.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

1° Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque d'une surface S ; p et q les paramètres directeurs du plan tangent en ce point, définis par la relation identique

$$(1) \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0 ;$$

exprimer ces cinq quantités à l'aide de deux paramètres variables α et β, de manière à vérifier, outre la relation (1), les suivantes :

$$(2) \qquad z - px - qy = \alpha,$$

$$(3) \qquad y = \beta x,$$

$$(4) \qquad p + q\beta = u(\alpha, \beta),$$

$u(\alpha, \beta)$ étant une fonction donnée de α et de β.

Si l'on prend α et β comme variables indépendantes, il existe, en général, un système et un seul de cinq fonctions x, y, z, p, q satisfaisant aux conditions précédentes et on l'obtient sans aucun signe de quadrature.

Faire voir que la surface S ainsi obtenue se réduit à une courbe si $\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = 0$, et dans ce cas seulement.

Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface S, dans le système de coordonnées curvilignes α, β. Montrer que les lignes α = const., β = const. sont conjuguées sur S. Les développables circonscrites à la surface suivant les lignes α = const. sont des cônes. Quel est le lieu des sommets de ces cônes ?

2° Pour que les développables circonscrites à S suivant les lignes β = const. soient également des cônes, il faut et il suffit que la fonction u soit de la forme

$$u = AB + \alpha B_1 + B_2,$$

où A est une fonction quelconque de α seule ; B, B_1, B_2 trois fonctions quelconques de β seule.

Si l'on choisit de toutes les manières possibles la fonction A (les fonctions B, B_1, B_2 étant, au contraire, prises une fois pour toutes), la surface S ne cesse pas de vérifier une certaine équation linéaire aux dérivées partielles

$$Pp + Qq = R \tag{5}$$

où P, Q, R sont des fonctions de x, y, z. Quelles sont les caractéristiques de cette équation ?

Le lieu des sommets des cônes circonscrits suivant les courbes β = const. est le même pour toutes les surfaces intégrales de l'équation (5).

3° Comment doivent être choisies les fonctions B, B_1, B_2 pour que ce lieu soit une droite D (non située dans un même plan avec l'axe des z) ?

Montrer qu'on peut alors, sans diminuer la généralité, ramener les fonctions B_1, B_2 à être des polynomes du premier degré en β.

Comment s'intégrerait l'équation des lignes asymptotiques des surfaces S ainsi obtenues ?

Que trouverait-on en rapportant ces surfaces à de nouvelles coordonnées ayant pour axe des z la droite D ?

Quelle relation ont-elles avec les surfaces analogues que l'on obtiendrait en faisant jouer à la droite D le rôle de l'axe des z primitifs, et à celui-ci le rôle de la droite D ?

A quelle forme simple pourrait-on ramener l'équation de l'une de ces surfaces par une transformation homographique ?

Mécanique rationnelle.

Un solide de révolution homogène S est mobile autour de son centre de gravité, que l'on suppose fixe dans l'espace. Ce centre de gravité est le sommet commun à deux trièdres : l'un $O\xi\eta\zeta$ fixe dans l'espace, l'autre $Oxyz$ lié au solide, Oz étant dirigé suivant l'axe de révolution.

Un point P, situé sur Oz, à une distance donnée d du point O, est soumis à une force perpendiculaire à l'axe $O\zeta$ et dirigée vers cet axe ; la valeur absolue de cette force est égale à $kM\rho$, k étant un coefficient constant, M la masse totale du solide S, ρ la distance du point P à $O\zeta$.

1° Former les équations différentielles qui servent à déterminer en fonction du temps les paramètres fixant la position du trièdre mobile.

2° Si l'on suppose que l'axe du solide S est d'abord placé perpendiculairement à $O\zeta$ et que l'on imprime au solide une rotation initiale autour de Oz ; cette rotation persistera ensuite. Quelle valeur minima peut-on attribuer à la vitesse angulaire de cette rotation pour qu'elle soit stable, c'est-à-dire telle que, si l'on vient à troubler très peu le mouvement, l'axe Oz reste indéfiniment très voisin du plan $\xi O\eta$?

3° En supposant que l'axe Oz est placé primitivement d'une manière donnée quelconque et que la composante suivant Oz de la rotation initiale est donnée différente de zéro, quelles doivent être les autres conditions initiales du mouvement pour que Oz tende, lorsque le temps croît indéfiniment, vers une position limite perpendiculaire à $O\zeta$? Dans le cas où ces conditions sont remplies, quelles sont les principales circonstances du mouvement ?

4° Étudier le mouvement dans le cas particulier suivant : le solide S est constitué par une tige rigide de masse négligeable, dirigée suivant Oz, et par deux disques circulaires identiques, ayant leurs centres sur Oz et leurs plans perpendiculaires à cet axe, à une distance du point O égale à $\frac{l}{\sqrt{2}}$. Pour chacun des disques, la masse, représentée par m, est supposée répartie uniformément sur une circonférence de rayon égal à l. Le point P est le centre de l'un des disques et le coefficient k est égal à 2. Les conditions du n° 3° sont rem-

plies et la composante suivant Oz de la vitesse angulaire de la rotation initiale est égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Trouver le lieu de l'axe Oz du solide.

5° Les conditions du n° 3° étant remplies pour un solide de révolution S quelconque, on imprime à ce solide, à un certain moment, une percussion de grandeur donnée et de direction perpendiculaire au plan $zO\zeta$. Suivant quelle ligne d'action faut-il appliquer cette percussion pour que l'axe Oz, dans le mouvement ultérieur, tende vers une position limite perpendiculaire à $O\zeta$? Comparer le nouveau déplacement de l'axe Oz avec celui qui aurait eu lieu sans la percussion.

Note. — La position du trièdre mobile par rapport au trièdre fixe sera déterminée par les angles d'Euler, θ, ψ, φ. Si A et C désignent les moments principaux d'inertie par rapport à Ox et Oz; p, q, y, r les composantes de la rotation suivant Ox, Oy, Oz et $2T$ la force vive du solide, on rappelle les formules suivantes :

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi$$

$$q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi$$

$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'$$

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2 = A(\sin^2\theta\,\psi'^2 + \theta'^2) + C(\psi'\cos\theta + \varphi')^2.$$

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1906).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES [1];

PAR M. C. CLAPIER.

I. Nous supposerons que le triangle ABC soit orienté de manière que chacun de ses côtés puisse être envi-

[1] *Voir* l'énoncé, page 406.

sage comme axe de segment dont le sens positif est le sens de parcours :

$$BC = a, \qquad CA = b, \qquad AB = c, \qquad 2p = a + b + c.$$

Cherchons le lieu S_A correspondant à l'équation

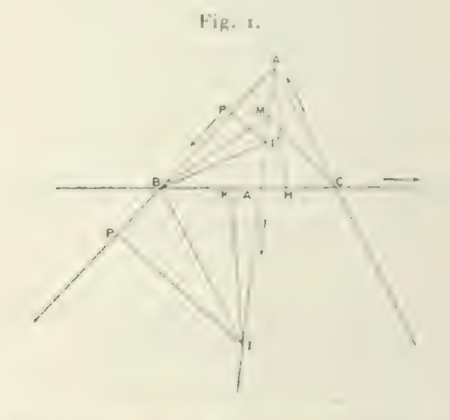
$$(1) \qquad b\overline{MB}^2 + c\overline{MC}^2 - a\overline{MA}^2 = abc.$$

Les points du lieu qui sont à une distance donnée R du point A satisfont à la relation

$$(2) \qquad b\overline{MB}^2 + c\overline{MC}^2 = a(bc + R^2);$$

d'après le théorème de Stévin, ces points sont situés sur une circonférence dont le centre A_1, déterminé par la condition $\frac{A_1B}{A_1C} = -\frac{c}{b}$, est précisément le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ du triangle.

Fig. 1.



Son rayon s'obtiendra en déterminant les points M situés sur le diamètre BC : il suffit de substituer dans l'expression (2)

$$MB = A_1B - A_1M,$$
$$MC = A_1C - A_1M,$$

et, en tenant compte des valeurs de

$$A_1B = \frac{ac}{b+c}, \qquad A_1C = \frac{ab}{b+c},$$

il vient

$$(b+c)\,\overline{A_1M}^2 = a\,R^2 + abc\,\frac{b+c-a}{b+c}.$$

Si nous prenons le point M à l'intersection de la circonférence dont le rayon est donné par l'égalité précédente et de la circonférence de centre A et de rayon R, nous voyons que le lieu cherché S_A peut être déterminé par la relation

$$(3) \qquad (b+c)\,\overline{MA_1}^2 - a\,\overline{MA}^2 = abc\,\frac{b+c-a}{b+c}.$$

Le théorème de Stévin nous montre que S_A est une circonférence dont le centre I, situé sur la bissectrice AA_1, est fixé par la condition $\frac{IA_1}{IA} = \frac{a}{b+c}$.

Or, si l'on désigne par r le rayon du cercle exinscrit relatif à l'angle A, par h la hauteur correspondante, nous avons

$$\frac{IA_1}{IA} = \frac{r}{r+h};$$

d'autre part, la surface du triangle ABC a pour expression

$$\frac{ah}{2} = (p-a)\,r = \frac{b+c-a}{2}\,r,$$

et l'on déduit

$$\frac{r}{r+h} = \frac{a}{b+c}.$$

Donc, le point I coïncide avec le centre du cercle exinscrit envisagé.

Si dans l'équation (2) nous remplaçons R^2 par

— R², nous serons conduits aux deux relations équivalentes :

$$b\overline{MB}^2 + c\overline{MC}^2 - a\overline{MA}^2 = abc,$$

$$(b + c)\overline{MA_1}^2 - a\overline{MA}^2 = abc\,\frac{b + c - a}{b + c}.$$

le lieu correspondant est un cercle S', dont le centre I' est tel que l'on a

$$\frac{I'A_1}{I'A} = -\frac{IA_1}{IA}.$$

Les quatre points A, A_1, I', I sont conjugués harmoniques et le point I' est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

En résumé, si l'on prend dans les équations (1) les combinaisons de signes $\begin{matrix}+&+&+\\-&+&+\end{matrix}$, on obtient comme lieux du point M deux cercles S' et S_A concentriques respectivement aux cercles inscrits dans l'angle A du triangle donné.

Les deux combinaisons de signes $\begin{matrix}+&-&+\\+&+&-\end{matrix}$ donnent des cercles S_B et S_C concentriques aux deux autres cercles exinscrits du triangle.

Les quatre autres combinaisons de signes résultent des précédentes en donnant au second membre des équations (1) une valeur négative ; les lieux correspondants n'ont aucun point réel.

Remarque. — La relation (3) devient identique lorsque $b + c = a$, c'est-à-dire lorsque les trois points A, B, C sont en ligne droite.

Dans ce cas, quel que soit le point M de l'espace, on a l'identité de Stewart,

$$b\overline{MB}^2 + c\overline{MC}^2 - a\overline{MA}^2 = abc.$$

Il est clair que tous les points de l'espace situés sur la sphère qui passe par le grand cercle S_A satisfont à l'équation (3) et par suite à l'équation (1) équivalente.

II. Pour déterminer le rayon ρ_A de la circonférence S_A nous allons chercher les points de ce lieu situés sur la bissectrice AI (*fig.* 1).

Les deux triangles AMB, AMC nous donnent les relations

$$\overline{MB}^2 = \overline{MA}^2 + c^2 - 2c\,\overline{MA}\cos\frac{A}{2},$$

$$\overline{MC}^2 = \overline{MA}^2 + b^2 - 2b\,\overline{MA}\cos\frac{A}{2},$$

d'où

$$b\,\overline{MB}^2 + c\,\overline{MC}^2 = (\overline{MA}^2 + bc)(b + c) - 4bc\,\overline{MA}\cos\frac{A}{2},$$

et, comme le premier membre a pour valeur

$$a\,\overline{MA}^2 + abc,$$

nous avons l'équation

$$\overline{MA}^2 - 2\,\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{p - a}\,\overline{MA} + bc = 0,$$

qui détermine les points cherchés M et M'.

Les segments AM et AM' situés sur le diamètre AI de la circonférence S_A vérifient les relations

$$AM.AM' = bc,$$

$$\frac{AM + AM'}{2} = AI = \frac{p - a}{\cos\frac{A}{2}}.$$

La première nous donne la puissance du point A et la seconde nous donne la position déjà trouvée du centre de la circonférence S_A.

On peut en déduire le rayon

$$\rho_A^2 = \left(\frac{AM - AM'}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - bc\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}},$$

et, substituant à $\cos^2\frac{A}{2}$ sa valeur $\frac{p(p-a)}{bc}$, il vient

(1) $$\rho_A^2 = \frac{abc}{p-a}.$$

Supposons que le triangle ABC se déplace de manière à rester circonscrit à un cercle de rayon r' et inscrit dans un autre de rayon R; je dis que, dans ce cas, il est possible d'exprimer la somme

$$\frac{1}{\rho_A^2} + \frac{1}{\rho_B^2} + \frac{1}{\rho_C^2}$$

à l'aide de R et r'.

En effet,

$$\frac{1}{\rho_A^2} = \frac{p-a}{abc}, \qquad \frac{1}{\rho_B^2} = \frac{p-b}{abc}, \qquad \frac{1}{\rho_C^2} = \frac{p-c}{abc};$$

la surface du triangle est

$$\frac{abc}{4R} = pr',$$

donc

$$\frac{1}{\rho_A^2} + \frac{1}{\rho_B^2} + \frac{1}{\rho_C^2} = \frac{p}{abc} = \frac{1}{4Rr'}.$$

III. Nous avons trouvé que la puissance du sommet A par rapport au cercle S_A était positive et égale à bc; cela nous permet de construire ce cercle.

On peut remarquer que, si l'on désigne par I, I', I'', I''' les centres des cercles inscrits au triangle ABC, on a

les égalités

$$AI \cdot AI' = bc$$

$$AI'' \cdot AI''' = bc$$

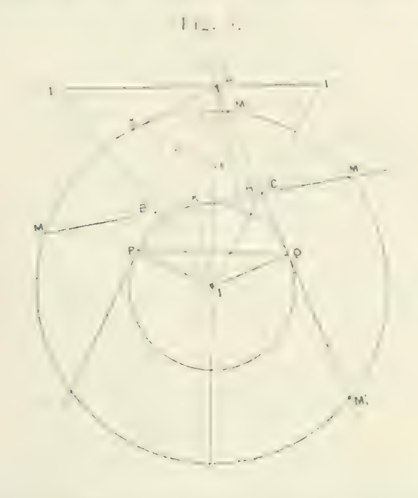
et

$$\overline{AT}^2 = bc,$$

AT étant la distance du point A au cercle S_4.

Les puissances des deux autres sommets B et C se

Fig. 2.



calculent de la même manière; elles sont négatives et ont pour valeurs absolues respectives ca et ab.

La puissance du centre I′ est

$$\rho_4^2 - \overline{II'}^2 = \frac{abc}{p-a} - \frac{a^2}{\cos^2\frac{A}{2}} = -\frac{abc}{p}$$

et l'on trouve de même, pour la puissance des centres I″ et I‴, les valeurs respectives

$$\frac{c^2}{\cos^2\frac{C}{2}} - \rho_4^2 \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{\cos^2\frac{B}{2}} - \rho_4^2,$$

qu'il est facile d'exprimer à l'aide de a, b, c.

Les points d'intersection M et M' du côté BC du triangle avec la circonférence S_A sont déterminés par les deux relations

$$\mathrm{BM}.\mathrm{BM}' = -ca,$$
$$\mathrm{BK} = p - c,$$

K étant le milieu de $\overline{\mathrm{MM}'}$; l'équation qui détermine les points M_1 d'intersection des côtés AC ou AB est

$$\overline{\mathrm{AM}_1}^2 - 2p.\mathrm{AM}_1 + bc = 0.$$

IV. Le rapport

$$\frac{\mathrm{BM}.\mathrm{BM}'}{\mathrm{CM}.\mathrm{CM}'} = \frac{ca}{ab} = \frac{c}{b}.$$

Si, les points B et C restant fixes, le rapport $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ demeure invariable, les points M et M' satisfont à la relation

$$\frac{(\mathrm{BM} - a)(\mathrm{BM}' - a)}{\mathrm{BM}.\mathrm{BM}'} = \frac{b}{c} = \text{const.}$$

Ils décrivent sur BC deux divisions homographiques en involution dont les points doubles sont donnés par l'équation

$$\overline{\mathrm{BN}}^2\left(1 - \frac{b}{c}\right) - 2a.\mathrm{BN} + a^2 = 0.$$

Donc le cercle S_A coupe orthogonalement la circonférence décrite sur ces points doubles N et N' comme diamètre.

V. On donne le cercle S_A dont le rayon ρ est donné par l'expression (4)

$$\rho^2 = \frac{abc}{p - a}.$$

La corde MM′ est supposée fixe et se trouve à la distance $\mathrm{IK} = r$ du centre I; cherchons comment se déplace le sommet A du triangle ABC, dont les côtés AB et AC restent tangents au cercle exinscrit (*fig.* 2).

D'abord le rayon R du cercle circonscrit au triangle variable reste constant; nous avons, en effet, les trois expressions équivalentes de la surface,

$$\frac{ah}{2} = (p - a)r = \frac{abc}{4\mathrm{R}},$$

d'où l'on déduit

$$(5) \qquad h = \frac{bc}{2\mathrm{R}}, \qquad \mathrm{R} = \frac{\rho^2}{4r}.$$

La première de ces relations peut s'écrire

$$\frac{\overline{\mathrm{AT}}^2}{\mathrm{AH}} = 2\mathrm{R} = \text{const.}$$

et, d'après un théorème de Chasles (*Géométrie supérieure*), le lieu du point A est une circonférence T qui passe par les points M et M′.

La droite BC est l'axe radical des deux cercles S_1 et T.

La droite PQ qui joint les points de contact des côtés AB et AC avec le cercle exinscrit est la polaire du point A par rapport à ce cercle; son enveloppe est la polaire réciproque de la circonférence T, relative au cercle précédent: c'est une conique admettant pour foyer le point I et pour axe la perpendiculaire IK qui est la ligne de symétrie des trois cercles.

Remarque. — Si l'on désigne par d la distance du centre I du cercle exinscrit au centre C du cercle circonscrit au triangle, nous savons que l'on a

$$d^2 = \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}r.$$

Le point C décrit donc une circonférence de centre I et le cercle circonscrit au triangle ABC enveloppe deux circonférences concentriques.

VI. Nous avons déjà remarqué que l'équation (3) était satisfaite pour tous les points de la sphère obtenue en faisant tourner la circonférence S_4 autour du diamètre AA_1. Le lieu demandé est donc la sphère qui passe par le cercle correspondant.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

Épreuve théorique. — I. *Déterminer une surface contenant la parabole*

$$x = 0, \qquad y^2 - 4az + 8a^2 = 0$$

et telle que, si l'on projette un de ses points M *en* M' *sur* OXY, *puis* M' *en* M'' *sur le plan tangent en* M, *le* z *du point* M'' *soit égal à* a, *quel que soit* M.

II. *Montrer que les normales à la surface* S,

$$x(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(x^2 + y^2) = 0,$$

coupent le plan XOY *et le plan* XOZ *en des points dont le lieu, sur chacun des deux plans, est une simple ligne. Partant de là, déterminer, sans intégration, les lignes de courbure de* S.

Épreuve pratique. — *Montrer a priori que, des deux intégrales*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\text{[illegible]}}\sqrt{1+x^2}}, \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\text{[illegible]}}\sqrt{1+x^2}},$$

une seule a une valeur finie. Calculer cette valeur en passant par l'intégrale indéfinie. (Juillet 1906.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — 1° *Recherche de la ligne de striction d'une surface réglée dont les génératrices sont normales à une courbe donnée* S.

Cas des normales principales et des binormales.

Si θ *est l'angle de la génératrice* G *qui coupe la courbe* S *en* M *avec la normale principale* MN, *on exprimera en fonction de* θ *et des coordonnées de* M *la distance* V *du point* N *au point central* M_1 *relatif à la génératrice* G.

2° *Déterminer* θ *par la condition que la surface, lieu des normales* G, *soit développable.*

Épreuve pratique. — *Étant donnée l'équation*

$$z\sqrt{1+p^2+q^2}=a:$$

1° *Trouver une intégrale complète de cette équation et sa solution singulière;*

2° *Trouver une surface intégrale qui passe par une circonférence donnée, parallèle au plan* xOy, *et ayant son centre sur* Oz;

3° *Interpréter géométriquement les résultats.*

(Juillet 1906.)

Lille.

Épreuve théorique. — Problème : *Étant donnée la surface représentée par l'équation*

$$(S) \qquad 2az = mx^2 + ny^2,$$

où a, m, n *désignent des constantes (axes rectangulaires), calculer le volume limité par cette surface, le plan* xOy *et le cylindre*

$$(x^2-y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

Former l'équation différentielle des courbes de la sur-

[illegible] z) dont les tangentes font avec Oz un angle donné; intégrer cette équation quand n est nul ou égal à m.

Question de cours. — 1° *Définir une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables :*

$$(1)\qquad f(x, y, z, p, q) = 0.$$

2° *Faire voir comment on peut, d'une intégrale complète, déduire toutes les intégrales de l'équation* (1).

3° *Démontrer que deux intégrales complètes différentes conduisent à une seule et même solution singulière ; montrer comment cette solution singulière peut être déduite, a priori, de l'équation* (1).

4° *Appliquer la méthode de recherche précédente à chacune des deux équations*

$$(2)\qquad z^2(1+p^2+q^2) = a^2,$$

$$(3)\qquad z = px + qy + f(p, q).$$

Montpellier.

Épreuve théorique. — *Une surface rapportée à des axes rectangulaires a pour équation*

$$z = f(x) + \varphi(y);$$

soient α, β, γ les angles de la normale avec les axes OX, OY, OZ.

1° *Déterminer les fonctions f et φ de façon que les rayons de courbure principaux soient reliés par la relation*

$$(R + R')\cos\gamma = C.$$

2° *Montrer que l'on peut choisir les fonctions f et φ de façon que*

$$(R - R')\cos\gamma \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta$$

soit en même temps constant.

3° *Déterminer les lignes de courbure de ces dernières surfaces, et les centres de courbure principaux.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx.$$

(Juillet 1906.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Calculer, en appliquant le théorème des résidus, l'intégrale*

$$\int_{(C)} \frac{dz}{(z-\alpha)^n (z-\beta)^n},$$

prise dans le sens positif le long d'un cercle (C) *de rayon* 1, *ayant pour centre l'origine ; n désigne un entier positif,* α *et* β *des constantes telles que*

$$|\alpha| < 1 \quad \text{et} \quad |\beta| > 1.$$

2° *On considère les intégrales*

$$\int_{(C)} \frac{dz}{z^2-2iaz+1} \quad \text{et} \quad \int_{(C)} \frac{(z^2+1)\,dz}{(z^2-2iaz+1)^2},$$

où a désigne une constante positive et i le symbole $\sqrt{-1}$, *ces intégrales étant prises dans le sens positif le long d'un cercle de rayon* 1 *ayant pour centre l'origine. Calculer les valeurs de ces intégrales.*

3° *Calculer les intégrales*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+i\cos\varphi} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(a+i\cos\varphi)^2},$$

où a et i ont le même sens que dans la question précédente, en faisant le changement de variable défini par l'égalité

$$e^{i\varphi} = z.$$

II. *Les axes* O*xyz étant rectangulaires, on considère la courbe* (C) *dont la projection orthogonale sur le plan des x, y est la sinusoïde*

$$y = \sin x.$$

1° Former l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la cote z d'un point quelconque de C, considérée comme fonction de l'abscisse x pour que les normales principales de C soient toutes parallèles au plan de coordonnées Oyz.

2° Prouver que, lorsque les normales principales de C sont parallèles au plan des yz, les tangentes font un angle constant avec l'axe des x.

Ce résultat dépend-il de la forme sinusoïdale donnée pour la projection de C sur le plan des xy ?

3° La projection de C sur le plan des xy étant la sinusoïde donnée, indiquer la nature de la courbe C sachant que ses tangentes font un angle de 45° avec Ox.

Épreuve pratique. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et l'axe* Oz *étant supposé vertical, on considère la surface* (S) *définie par l'équation*

$$z = \frac{xy}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

où l'on désigne par a *une constante, et où l'on prend la valeur positive du radical ; puis le solide* (A) *limité latéralement par le cylindre*

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

en bas par le plan xOy *et en haut par la surface* (S).

1° *Calculer le volume du solide* (A).

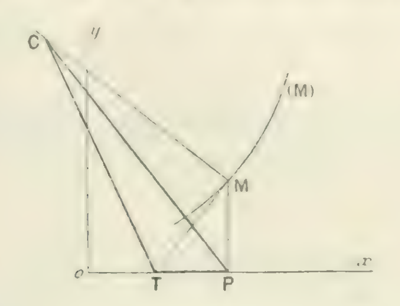
2° *Déterminer le centre de gravité du solide* (A) *en supposant sa densité constante et égale à* ρ.

Toulouse.

Épreuve théorique. — I. *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox *et* Oy, *on considère sous le nom de courbes* (M) *les courbes telles que, si l'on représente par* C *le centre de courbure d'une telle courbe relatif au point* M, *par* P *la projection de* M *sur* Ox *et par* T *le point d'intersection de la tangente en* M *avec* Ox, *l'aire du triangle* CTP *soit constante et égale à trois fois l'aire d'un carré de côté donné* $\frac{a}{2}$.

1° *Exprimer les coordonnées x, y, par rapport à Ox et Oy, d'un point M d'une courbe (M) en fonction du coefficient angulaire t de la tangente en M à cette courbe.*

2° *Déterminer la forme générale des courbes (M) qui*



partent de l'origine O tangentiellement à la droite dont l'équation est

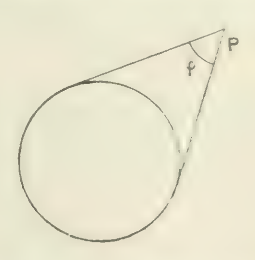
$$y = x.$$

II. *Lignes de courbure de la surface représentée en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}$$

dans laquelle a, b, c sont trois constantes.

Épreuve pratique. — *On considère dans un plan un cercle de rayon donné a. En désignant par φ l'angle des*



tangentes issues d'un point quelconque P du plan au cercle et par de l'élément d'aire du plan entourant le point P,

on demande de calculer l'intégrale

$$S(\rho - \sin\rho)\,d\sigma$$

étendue à toute la partie du plan extérieure au cercle.

(Juillet 1906.)

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES A L'ÉTUDE DES SCIENCES PHYSIQUES

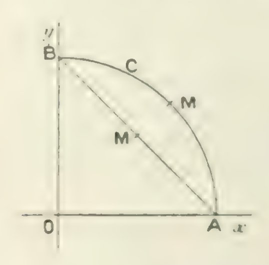
Paris

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Les lettres x et y désignant les coordonnées d'un point M par rapport à deux axes rectangulaires Ox et Oy.*

1° *Calculer l'intégrale :*

$$\int y^2\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy$$

le long de l'arc de cercle ACB décrit de O comme centre



avec l'unité comme rayon et situé dans l'angle positif des axes xOy ;

2° *Calculer la même intégrale le long de la corde* AB ;

3° *Reconnaître si l'expression*

$$y^2\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy$$

est une différentielle totale exacte d'une fonction de deux variables indépendantes x et y.

2° *Déterminer un facteur λ, fonction de la seule variable x, de telle façon que le produit de l'expression précédente par λ :*

$$\lambda y^2 dx + \lambda(x^2 - 2xy)\,dy,$$

soit une différentielle totale exacte, et indiquer la fonction dont ce produit est alors la différentielle.

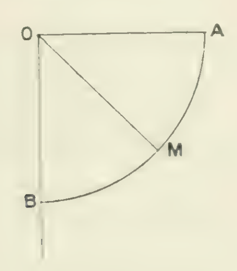
II. *Intégrer la différentielle du second ordre*

$$y^3 y'' = -1,$$

y'' désignant la dérivée seconde de la fonction inconnue y par rapport à la variable x.

Construire celle des courbes intégrales qui passe par le point de coordonnées $x = 1$, $y = 1$ et qui admet en ce point une tangente parallèle à Ox.

III. *Un pendule simple* OM *dont la longueur est de* 1^{m}



et dans lequel le point matériel M *a une masse de* 10^{g}, *est écarté d'un angle droit de la verticale dans la position initiale* OA. *Il est abandonné à lui-même sans vitesse initiale.*

Calculer, en unités C. G. S., *la vitesse que possède le point* M *à l'instant où le pendule passe par la verticale* OB, *ainsi que la tension du fil à cet instant.*

On prendra $g = 980$.

Épreuve pratique. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}.$$

Figurer les courbes intégrales en supposant que x et y désignent les coordonnées rectangulaires d'un point M.

II. *Calculer les intégrales*

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + [illegible]},$$

$$\int_2^{3} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \, dx,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{2 + \sqrt{1 - x^2}},$$

à $\frac{1}{100}$ *près.*

On indiquera sur la copie le détail des calculs.

(Octobre 1905.)

Paris.

Épreuve théorique. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 1.$$

Construire la courbe intégrale qui passe par le point de coordonnées $x = 0$, $y = 1$.

II. *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin ax,$$

dans laquelle a désigne une constante donnée.

III. *L'expression*

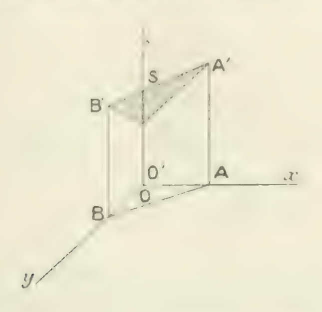
$$\frac{(x + 2y)\,dx + y\,dy}{(x + y)^2}$$

est-elle la différentielle totale d'une fonction U *des deux variables indépendantes de x et y? Dans le cas de l'affirmative, déterminer cette fonction* U.

IV. *On considère la surface* S *qui, par rapport à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *a pour équation*

$$z = x^2 - y - 1 ;$$

on prend sur Ox *une longueur* OA = 1, *sur* Oy *une longueur* OB = $\frac{1}{2}$, *on joint* AB *et l'on construit le prisme droit*



ayant pour base le triangle OAB. *Calculer le volume limité par le triangle* OAB, *les faces latérales du prisme et la surface* S.

Épreuve pratique — I. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près l'intégrale définie*

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}.$$

II. *Un point* m *dont la masse est* 1^{g} *est soumis à l'action de deux forces, à savoir :*

1° *Un poids* p ;

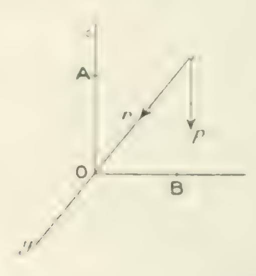
2° *Une force dirigée vers un centre fixe* O *ayant une intensité constante égale à celle du poids.*

α. *Montrer que la résultante des deux forces dérive d'une fonction de forces* U *qu'on supposera nulle au point* O.

β. *Déterminer et représenter les surfaces de niveau.*

γ. *Calculer, dans le système* C. G. S., *le travail total effectué par la résultante des deux forces quand le point* m *passe de la position* A *située à* 1^{m} *au-dessus de* O *sur la verticale de ce point, au point* B *situé à* $0^{\mathrm{m}},50$ *de* O *sur une horizontale issue de ce point.*

6. *Le mobile m est lancé du point A dans une direction quelconque avec une vitesse initiale de $6^m,04$ à la seconde et soumis à l'action des deux forces. Appliquer au mouvement le théorème de la force vive et calculer la vitesse du point dans une quelconque de ses positions, on ne cherchera pas la trajectoire du point.*



Note. — *On appellera r la distance du mobile au point O et z sa hauteur au-dessus du plan horizontal passant par O. On prendra $g = 980$.* (Juillet 1905.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2029.

(1905, p. [illegible].)

On projette un point M d'une ellipse en P et Q sur les diamètres conjugués égaux. Montrer que le milieu I de PQ est situé sur la normale à l'ellipse en M, et que le point de Frégier relatif à M est le symétrique de M par rapport à I. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Lethierry.

Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse et soient $a \cos\varphi$, $b \sin\varphi$ les coordonnées de M.

Les équations des diamètres conjugués égaux sont

$$bx - \varepsilon ay = 0 \qquad (\text{avec } \varepsilon = \pm 1).$$

Les équations de MP et MQ sont

$$\varepsilon a x + b y - \varepsilon a^2 \cos\varphi - b^2 \sin\varphi = 0.$$

L'équation générale des droites passant par P ou Q est

$$\lambda(b x - \varepsilon a y) + \varepsilon a x + b y - \varepsilon a^2 \cos\varphi - b^2 \sin\varphi = 0$$

et déterminons λ de façon que cette équation représente la parallèle à MQ menée par P et la parallèle à MP menée par Q. On trouve

$$\lambda = \frac{2\varepsilon a b}{c^2}$$

et par suite les équations de ces deux parallèles sont comprises dans la formule

$$\varepsilon a\left(\frac{a^2 - b^2}{c^2} x - a \cos\varphi\right) - b\left(\frac{a^2 - b^2}{c^2} y - b \sin\varphi\right) = 0.$$

Leur point de rencontre a pour coordonnées

$$x = \frac{a c^2}{a^2 - b^2} \cos\varphi,$$

$$y = \frac{b c^2}{a^2 - b^2} \sin\varphi.$$

qui sont celles du point de Frégier F relatif à M.

Par suite, le point I, point de rencontre des diagonales du parallélogramme MPFQ, satisfait bien aux conditions de l'énoncé.

Autres solutions par MM. Valère Mais et J. Rose.

2033.

(1906, p. 48.)

Si, dans le triangle sphérique ABC, *l'angle* A *est de grandeur constante, et si l'on a*

$$\frac{\text{tang AB}}{\text{tang AC}} = \text{const.},$$

on a aussi

$$\frac{\cos \widehat{B}}{\cos \widehat{C}} = \text{const.}$$

(R. B.)

SOLUTION

Par un Abonné.

Reprenons les formules fondamentales

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;$$

si l'on porte dans la seconde et dans la troisième l'expression de $\cos a$ fournie par la première, on obtient

$$\cos b \sin c - \cos c \sin b \cos A = \sin a \cos B,$$

$$\cos c \sin b - \cos b \sin c \cos A = \sin a \cos C.$$

On en conclut, en divisant membre à membre,

$$\frac{\operatorname{tang} c - \operatorname{tang} b \cos A}{\operatorname{tang} b - \operatorname{tang} c \cos A} = \frac{\cos B}{\cos C},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Autres solutions de MM. Gouyal, Lemaire, J. Rose, Retali.

QUESTION.

2045. Soient (A, A′), (B, B′), (C, C′) trois couples de semi-droites d'un même plan, les semi-droites d'un même couple étant parallèles et de même sens. Les cycles inscrits dans les quatre triangles (A, B, C), (A, B′, C′), (A′, B, C′), (A′, B′, C) sont tangents à un même cycle. Il en est de même des cycles inscrits dans les triangles (A′, B, C), (A, B′, C), (A, B, C′), (A′, B′, C′).

Le théorème est encore vrai si les semi-droites d'un même couple sont parallèles et de sens contraires. On obtient comme cas particuliers de cette dernière proposition le théorème de Feuerbach et le théorème suivant :

Soient ABC un triangle, A′, B′, C′ les milieux de ses côtés. Les cercles inscrits dans les quatre triangles A′B′C′, AB′C′, A′BC′, A′B′C sont tangents à un même cercle.

La première proposition donne des théorèmes où interviennent des cercles exinscrits. (R. B.)

[P6b]

SUR LA GÉOMÉTRIE DE DIRECTION DANS L'ESPACE;

Par M. R. BRICARD.

1. J'ai montré dans un précédent article (¹) comment la *géométrie de direction* dans le plan se rattache naturellement à la géométrie de l'espace. En particulier, les transformations par *semi-droites réciproques de Laguerre* dérivent des transformations homographiques involutives, qui changent en lui-même un cône du second ordre, ou bien, en modifiant légèrement le point de vue, des transformations involutives de l'espace qui n'altèrent pas les longueurs d'une figure (ces opérations sont la symétrie par rapport à un point, par rapport à une droite ou par rapport à un plan).

On peut de même rattacher les *transformations par semi-plans réciproques* de l'espace, auxquelles Laguerre a consacré une courte Note (²), à certaines transformations de l'espace à quatre dimensions. Je me propose, dans le présent travail, de développer cette indication que j'ai donnée à la fin de mon premier article.

2. Je rappellerai d'abord quelques définitions et propositions relatives à la géométrie de direction.

Une surface (qui n'est pas à un seul côté) partage l'espace en deux régions, et l'on peut donner arbitrai-

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1906, p. 159.
(²) *Comptes rendus,* 1881; *Œuvres,* t. II, p. 604.

rement à l'une de ces régions le nom de région *positive*, à l'autre le nom de région *négative* [1]; on désignera sous le nom de *semi-surface* une surface ainsi définie.

Par exemple un plan *porte* deux semi-plans que l'on peut appeler *opposés* et que l'on doit regarder comme deux semi-surfaces distinctes. De même une sphère porte deux semi-sphères opposées.

Pour que deux semi-surfaces se touchent en un point, il faut non seulement qu'elles aient même plan tangent en ce point, mais que les régions positives par rapport aux deux semi-surfaces soient les mêmes dans le voisinage de ce point. De là résultent immédiatement les propositions suivantes :

On ne peut mener à une semi-sphère qu'un semi-plan parallèle à un semi-plan donné; il existe une semi-sphère et une seule touchant quatre semi-plans donnés; il existe un semi-cône de révolution et un seul touchant trois semi-plans donnés; il existe une semi-sphère et une seule inscrite à un semi-cône de révolution donné et tangente à un semi-plan donné.

Ce qui précède est extrait presque textuellement de la Note de Laguerre. Je ferai encore les conventions suivantes : la distance d'un point à un semi-plan sera considérée comme positive si le point est dans la région positive par rapport au semi-plan, et comme négative dans le cas contraire; le rayon d'une semi-sphère sera considéré comme positif si la région positive par rapport à cette semi-sphère en contient le centre, et comme négatif dans le cas contraire.

---

(1) Laguerre emploie les mots de *region exterieure, region interieure;* cette terminologie peut donner lieu à des confusions.

On voit immédiatement que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un semi-plan et une semi-sphère soient tangents est que la distance au semi-plan du centre de la semi-sphère soit égale en grandeur et en signe au rayon de la semi-sphère.*

3. *Représentation dans l'étendue* (¹) *des semi-plans et des semi-sphères.* — Considérons un plan réel, représenté en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation

$$(1) \qquad \xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0,$$

où ξ, η, ζ sont les coefficients. Le plan (1) porte deux semi-plans. Je dirai que le premier a pour *coordonnées*

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad +\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

et le second

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad -\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

Ainsi à tout système de nombres ξ, η, ζ, τ, satisfaisant à la relation

$$(2) \qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-\tau^2=0,$$

correspond un semi-plan (P) bien déterminé.

Étant donné un semi-plan (P) de coordonnées ξ, η, ζ, τ, nous conviendrons de prendre pour région positive relative au semi-plan la région des points x, y, z, tels que l'expression

$$\frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{\tau}$$

(¹) J'emploierai, pour parler de l'espace à quatre dimensions, le mot d'*étendue,* introduit par M. Jouffret dans son *Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions* (Paris, Gauthier-Villars, 1904).

soit positive. En vertu de cette convention, et de celle qui a été faite plus haut relativement au signe de la distance d'un point à un semi-plan, l'expression précédente représente en grandeur et en signe la distance au semi-plan (P) du point x, y, z.

Soient maintenant λ, μ, ν les coordonnées du centre d'une semi-sphère (S), ρ son rayon (positif ou négatif). Pour que le semi-plan (P) et la semi-sphère (S) soient tangents, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$\frac{\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + 1}{\tau} = \rho,$$

ou

$$(3) \qquad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta - \rho\tau + 1 = 0.$$

Les relations (2) et (3) peuvent être interprétées dans l'étendue.

La relation (2), si l'on considère ξ, η, ζ, τ comme coordonnées cartésiennes d'un point de l'étendue, représente un *hypercône du second degré* [H].

Ainsi, à tout semi-plan (P) correspond un point ϖ de l'hypercône [H]. Je dirai que ϖ est le point représentatif du semi-plan.

Considérons en second lieu l'équation

$$\lambda x + \mu y + \nu z - \rho t + 1 = 0;$$

elle représente un *espace linéaire* qui coupe l'hypercône [H] suivant une quadrique (Σ). Je dirai que cet espace et cette quadrique sont représentatifs de la sphère (S).

Ainsi les points de l'hypercône [H] sont représentatifs des divers semi-plans de l'espace; les quadriques tracées sur cet hypercône sont représentatives des diverses semi-sphères.

L'équation (3) admet dès lors cette interprétation immédiate :

Pour qu'un semi-plan touche une semi-sphère, il faut et il suffit que le point représentatif du premier soit sur la quadrique représentative de la seconde.

Faisons encore les remarques évidentes que voici :

Les deux semi-plans portés par le plan de l'infini ont leurs points représentatifs confondus au sommet O *de* [H].

Des semi-plans parallèles ont leurs points représentatifs sur une même génératrice de [H]. *La correspondance entre les semi-points et les plans est homographique.*

Les divers semi-plans tangents à un même semi-cône de révolution (Γ) *ont leurs points représentatifs distribués sur une même conique* C *tracée sur* [H]. Réciproquement, à toute conique tracée sur [H] correspond un semi-cône de révolution. *La correspondance entre un semi-plan mobile qui enveloppe* (Γ) *et son point représentatif qui décrit* C *est homographique.*

La première partie de ce dernier énoncé résulte de ce que les semi-plans en question sont tangents à une infinité de sphères. Leurs points représentatifs appartiennent donc à une infinité d'espaces linéaires et par conséquent à un plan. Ils sont donc répartis sur l'intersection de ce plan et de [H], c'est-à-dire sur une conique.

Quant à la seconde partie, elle résulte immédiatement de ce que la correspondance entre le point et le semi-plan est univoque.

4. *Transformations homographiques involutives de l'hypercône* [H] *en lui-même.* — Les transformations homographiques de l'étendue sont en nombre ∞^{24}. Un hypercône du second degré dépendant de 13 paramètres, celles de ces transformations qui changent en lui-même l'hypercône [H] sont au nombre de $\infty^{24-13} = \infty^{11}$. A chacune de ces transformations correspond une transformation de contact de l'espace qui change les semi-plans en semi-plans et les semi-sphères en semi-sphères. Je dirai plus loin un mot de ces transformations générales. Nous ferons ici une étude approfondie de celles qui présentent un caractère *involutif*.

Toute transformation involutive de l'étendue appartient, comme on le sait et comme il est aisé de le démontrer, à l'un des deux types suivants :

1° *L'homologie centrale involutive*, définie par un point c, le *centre* de l'homologie et un espace linéaire [E], *l'espace-base* de l'homologie ; m étant un point quelconque de l'étendue, l'homologie centrale involutive lui fait correspondre le point m' construit de la façon suivante : On joint le point m au centre c ; la droite cm rencontre [E] en un point μ, et l'on construit le point m', conjugué harmonique de m par rapport au segment $c\mu$.

2° *L'homologie axiale involutive*, définie par une droite D et un plan (P) qui sont respectivement la *droite-axe* et le *plan-axe* de l'homologie. Au point m l'homologie axiale involutive fait correspondre le point m' obtenu de la façon suivante : On construit la droite unique passant par le point m et qui rencontre D et (P) (1), respectivement aux points μ et μ'. Le

(1) Cette droite est l'intersection du plan déterminé par m et D et de l'espace déterminé par m et (P).

point m' est le conjugué harmonique de m par rapport au segment $\mu\mu'$.

Pour qu'une transformation de la première ou de la seconde espèce transforme en lui-même l'hypercône [H], il faut que le sommet de cet hypercône soit un point double de la transformation. Or les points doubles de la transformation sont, dans le cas de l'homologie centrale, le centre et tous les points de l'espace-base ; dans le cas de l'homologie axiale, tous les points de la droite-axe et tous les points du plan-axe. On se trouve ainsi en présence de quatre cas possibles, dont l'examen conduit aisément aux conclusions suivantes :

Il existe *quatre* espèces de transformations homographiques involutives, qui transforment en lui-même un hypercône du second degré [H]. Ce sont respectivement :

a. Une homologie centrale involutive, dont le centre est le sommet de l'hypercône, l'espace-base étant quelconque ;

b. Une homologie centrale involutive, dont le centre est un point quelconque de l'étendue, et l'espace-base, l'espace polaire de ce point par rapport à l'hypercône ;

c. Une homologie axiale involutive, dont la droite-axe est une droite quelconque de l'étendue, et dont le plan-axe est le plan conjugué de cette droite par rapport à l'hypercône ;

d. Une homologie axiale involutive, dont le plan-axe est un plan quelconque de l'étendue, et la droite-axe, la droite conjuguée de ce plan par rapport à l'hypercône [1].

---

[1] Le lecteur, non familiarisé avec les conceptions de la géomé-

Dans l'étendue, un point et un espace dépendent chacun de quatre paramètres, une droite et un plan dépendent chacun de six paramètres [1]. On en conclut *que les transformations* (*a*) *et* (*b*) *dépendent de quatre paramètres et les transformations* (*c*) *et* (*d*) *de six paramètres.*

5. *Transformations par semi-plans réciproques.* — Les quatre transformations (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), de l'hypercône [H] en lui même sont représentatives de quatre transformations de l'espace, associant un semi-plan à un semi-plan, et qui seront dites *transformations par semi-plans réciproques*. Je les appellerai respectivement (α), (β), (γ), (δ).

---

trie à quatre dimensions, comprendra facilement, je pense, le sens des expressions employées dans le texte, sans que de longues explications soient nécessaires : Étant donnée une *hyperquadrique*, représentée par l'équation homogène du second degré à cinq variables

$$f(x, y, z, t, u) = 0,$$

l'*espace polaire* du point x_0, y_0, z_0, t_0, u_0 par rapport à l'hyperquadrique est l'espace ayant pour équation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \ldots = 0.$$

Si un point décrit une droite, son espace polaire tourne autour d'un plan qui est le *plan conjugué* de la droite par rapport à l'hyperquadrique. De même, si un point décrit un plan, etc.

Si l'hyperquadrique se réduit à un hypercône, l'espace polaire d'un point quelconque, le plan conjugué d'une droite quelconque, la droite conjuguée d'un plan quelconque contiennent le sommet de l'hypercône.

Les points et leurs espaces polaires, les droites et les plans conjugués donnent lieu à des théorèmes que l'on établit aisément en se guidant sur les théorèmes analogues et bien connus de la géométrie plane et de la géométrie de l'espace.

[1] En effet, une droite est définie par les deux points où elle rencontre deux espaces donnés ($3+3=6$ paramètres); un plan est corrélatif d'une droite et dépend du même nombre de paramètres.

Toutes ces transformations jouissent d'une même propriété : à des semi-plans tangents à une même semi-sphère, elles font correspondre des semi-plans tangents à une même semi-sphère. Autrement dit, *elles changent les semi-sphères en semi-sphères*. Cela résulte immédiatement de ce que les transformations (a), (b), (c), (d), étant homographiques, changent une quadrique tracée sur [H] en une autre quadrique.

Il faut maintenant chercher à définir (α), (β), (γ), (δ), en restant dans l'espace ordinaire. C'est ce que je vais faire successivement pour chacune de ces transformations.

6. *Transformation* (α). — Dans la transformation (a), deux points correspondants sont sur une même génératrice de [H]. Donc, dans la transformation (α), deux semi-plans réciproques sont parallèles.

En second lieu, il existe, dans la transformation (a), une infinité de points qui se correspondent à eux-mêmes : ce sont les points de la quadrique (S_0), intersection de [H] et de l'espace-base de l'homologie. Il existe donc dans la transformation (α) une semi-sphère (Σ_0) qui se correspond à elle-même.

Soient enfin p et p' deux points de [H], se correspondant dans la transformation (a), p_0 le point où pp' rencontre l'espace-base de l'homologie, c'est-à-dire la quadrique (S_0). Si O est le sommet de [H], les points p et p' divisent harmoniquement le segment Op_0. On peut donc énoncer le résultat suivant, en tenant compte des deux remarques faites à la fin du n° 3 : Soient (Π) et (Π') deux semi-plans réciproques dans la transformation (α), (Π_0), le semi-plan, parallèle à (Π) et à (Π'), qui touche la semi-sphère (Σ_0) ; les plans (Π) et (Π') sont équidistants du plan (Π_0).

En raisonnant comme dans mon premier article (p. 167), on reconnaît que la transformation (α) n'est autre chose que la combinaison d'une transformation parallèle et d'une symétrie par rapport à un point : *étant donné un semi-plan* (II), *on construit le plan* (II_1), *parallèle à* (II), *situé à une distance donnée et d'un côté donné de ce semi-plan, puis le semi-plan* (II'), *symétrique de* (II_1) *par rapport à un point fixe* ω *et orienté comme le semi-plan* (II).

7. *Transformation* (β). — Dans la transformation (b), deux points correspondants p et p' de l'hypercône sont en ligne droite avec le centre de l'homologie. Si donc on désigne par (ξ, η, ζ, τ), (ξ', η', ζ', τ'), (ξ_0, η_0, ζ_0, τ_0) les coordonnées respectives des points p, p', p_0, on peut trouver deux nombres λ et μ tels que l'on ait les relations

$$\begin{aligned} \lambda\xi + \mu\xi' &= \xi_0, \\ \lambda\eta + \mu\eta' &= \eta_0, \\ \lambda\zeta + \mu\zeta' &= \zeta_0, \\ \lambda\tau + \mu\tau' &= \tau_0, \\ \lambda + \mu &= 1. \end{aligned}$$

Mais les trois premières et la cinquième de ces relations peuvent s'interpréter ainsi : les trois plans ayant pour équations dans l'espace ordinaire

$$\begin{aligned} \xi x + \eta y + \zeta z + 1 &= 0, \\ \xi' x + \eta' y + \zeta' z + 1 &= 0, \\ \xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

passent par une même droite. Donc :

Deux semi-plans (II) *et* (II'), *réciproques dans la transformation* (β), *se coupent suivant une droite appartenant à un plan fixe* (II_0).

Soient en outre sur $[H]$ deux points quelconques p et p_1, et les deux points p' et p'_1 qui leur correspondent respectivement dans la transformation (b). Les quatre points p, p_1, p', p'_1 sont dans un même plan, puisque les droites pp' et $p_1p'_1$ sont concourantes. Les semi-plans concourants de l'espace (Π), (Π_1), (Π'), (Π'_1) sont donc tangents à un même semi-cône de révolution (n° 4).

L'analyse précédente permet d'énoncer le résultat suivant :

Une transformation (β) *est définie par un plan fixe* (Π_0) *et par un couple donné de semi-plans réciproques* (Π) *et* (Π'), *se coupant suivant une droite du plan* (Π_0). *Si* (Π_1) *est un semi-plan quelconque, on obtiendra comme il suit son semi-plan réciproque : on construira le semi-cône de révolution tangent à* (Π), (Π') *et* (Π_1), *et par la droite commune à* (Π_1) *et à* (Π_0) *on mènera le second semi-plan tangent au semi-cône. Ce sera le semi-plan* (Π') *cherché.*

On voit bien qu'une transformation (β) dépend de quatre paramètres.

La transformation (β) est la seule qu'ait définie Laguerre dans la Note rappelée plus haut. Elle fait l'objet d'une étude approfondie dans la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (t. I, p. 251 et suiv.).

8. *Transformation* (γ). — Les points de l'hypercône $[H]$ qui se correspondent à eux-mêmes dans l'homologie axiale involutive (c) sont le sommet O de cet hypercône et les deux points p_1 et p_2 où la droite-axe de cette homologie le rencontre. Soient maintenant p et p' deux points de $[H]$, se correspondant

dans la même transformation. Puisque les droites pp' et p_1p_2 se rencontrent, les quatre points p, p', p_1, p_2 sont dans un même plan et appartiennent à la conique C, intersection de ce plan et de [H]. Soit en outre m le point d'intersection du même plan et du plan-axe de l'homologie (c), plan qui, on se le rappelle, est le plan conjugué par rapport à [H] de la droite-axe p_1p_2. Le point m est le pôle de p_1p_2 par rapport à la conique C ([1]); mais le point m appartient à la droite pp', puisque cette droite doit rencontrer le plan-axe de l'homologie. Par conséquent, les points p et p' sont conjugués harmoniques sur la conique C par rapport aux points p_1 et p_2.

Aux points p, p', p_1, p_2 correspondent quatre semi-plans tangents à un même semi-cône de révolution, et les deux premiers sont conjugués harmoniques par rapport aux deux derniers. Nous pouvons donc formuler les conclusions suivantes :

La transformation (γ) est définie par deux semi-plans (Π_1) et (Π_2) qui se correspondent à eux-mêmes ; ce sont les semi-plans doubles de la transformation. Pour avoir le semi-plan réciproque d'un semi-plan (Π), on procédera de la façon suivante : on construira le semi-cône de révolution tangent à (Π), (Π_1) et (Π_2), puis le semi-plan (Π'), tangent à ce semi-cône et conjugué harmonique de (Π) par rapport à (Π_1) et (Π_2). (Π') est le semi-plan cherché.

([1]) En vertu de ce théorème : *Si dans l'étendue un plan tourne autour d'une droite, le pôle de cette droite par rapport à la conique d'intersection du plan et d'une hyperquadrique fixe décrit le plan conjugué de la droite par rapport à l'hyperquadrique.*

On peut dire encore que le plan qui contient les génératrices de contact des plans (Π) et (Π′) contient aussi la droite commune aux plans (Π_1) et (Π_2).

La transformation (γ), définie par deux semi-plans arbitraires, dépend de six paramètres.

9. *Transformation* (δ). — Les points de l'hypercône [H] qui se correspondent à eux-mêmes dans l'homologie axiale involutive (d) sont le sommet O et tous les points de la conique C, intersection de l'hypercône et du plan-base de l'homologie.

Soient p et p' deux points correspondants quelconques dans l'homologie (d). Ces deux points et le plan de la conique C sont dans un même espace linéaire [E], puisque la droite pp' rencontre le plan dont il s'agit. Autrement dit, les deux points p, p' et la conique C appartiennent à une même quadrique (S), intersection de [H] et de [E]. Soit maintenant m le point d'intersection de [E] et de la droite-axe de l'homologie. Le point m est sur la droite pp', puisque cette droite doit rencontrer la droite-axe ; d'autre part, le point m est le pôle par rapport à (S) du plan de la conique C [1]. Ainsi la droite pp' passe par le pôle du plan de la conique C par rapport à la quadrique (S).

On peut dire aussi que, si D est une conique quelconque tracée sur (S) et passant par p et p', les deux points p et p' sont conjugués harmoniques, sur D, par rapport aux deux points communs à C et à D.

Interprétons ces résultats dans l'espace : à la conique C correspond un semi-cône de révolution (Γ) ;

---

[1] En vertu de ce théorème : *Si un espace linéaire tourne autour d'un plan, son pôle par rapport à une hyperquadrique décrit la droite conjuguée du plan par rapport à cette hyperquadrique.*

si (Π) et (Π′) sont deux semi-plans réciproques dans la transformation (δ), il existe une semi-sphère (Σ) tangente à (Π), (Π′) et inscrite au semi-cône (Γ). Enfin, si l'on imagine un semi-cône de révolution (Δ) circonscrit à (Σ) et tangent à (Π) et à (Π′), ces deux semi-plans sont, relativement au semi-cône (Δ), conjugués harmoniques par rapport aux semi-plans tangents communs à (Γ) et à (Δ).

On en conclut que (Π) et (Π′) se coupent sur le plan du cercle de contact de (Γ) et de (Σ), et l'on parvient au résultat suivant :

La transformation (δ) est définie par un semi-cône de révolution fixe (Γ). Pour construire le semi-plan réciproque d'un semi-plan donné (Π), on construira la semi-sphère (Σ) inscrite à (Γ) et tangente à (Π); puis, par la droite commune à (Π) et au plan du cercle de contact de (Γ) et de (Σ), on mènera le second semi-plan tangent à (Σ). C'est le semi-plan cherché (Π′).

On voit aussi que les points de contact de (Π) et de (Π′) sont alignés sur le sommet de (Γ).

La transformation (δ), définie par un semi-cône de révolution, dépend de six paramètres.

10. *Autre point de vue.* — Opérons sur l'hypercône [Π] une transformation par polaires réciproques, de manière à transformer cet hypercône dans *la sphère imaginaire de l'infini*, dont l'équation tangentielle est

$$u^2 + v^2 + w^2 + h^2 + k^2 = 0.$$

Nous pourrons dire que toutes les transformations par semi-plans réciproques représentent dans l'espace les *transformations homographiques involutives de*

l'étendue, qui conservent la sphère imaginaire de l'infini.

Je désignerai ces transformations, corrélatives des transformations (a), (b), (c), (d), respectivement par (a'), (b'), (c'), (d'). Il est facile de les définir directement. Ainsi la transformation (a) est une homologie centrale involutive dont le centre est le sommet de l'hypercône [H]; (a') est donc aussi une homologie centrale involutive, ayant pour espace-base l'espace de l'infini, c'est-à-dire une *symétrie par rapport à un point*. La transformation (b) est une homologie centrale involutive, dont l'espace-base est l'espace polaire du centre de l'homologie par rapport à [H]; (b') est donc une homologie centrale involutive, dont le centre est rejeté à l'infini perpendiculairement à l'espace-base, c'est-à-dire une *symétrie par rapport à un espace linéaire*. La transformation (c) est une homologie axiale involutive, dont le plan-axe est le plan polaire de la droite-axe par rapport à [H]; (c') est donc une homologie axiale involutive, dont la droite-axe est rejetée à l'infini perpendiculairement au plan-axe, c'est-à-dire *une symétrie par rapport à un plan*. Enfin, la transformation (d') est *une symétrie par rapport à une droite*.

Les quatre transformations (a'), (b'), (c'), (d') sont les similitudes involutives de l'étendue. On voit donc, en résumé, que :

Les transformations (a), (b), (c), (d) peuvent être considérées comme représentant dans l'espace les similitudes involutives de l'étendue (c'est-à-dire les opérations qui transforment une figure en une figure semblable, et qui, deux fois répétées, ramènent la figure en coïncidence avec elle-même).

Les transformations (a), (b), (c), (d) correspondent aux symétries de l'étendue, respectivement par rapport à un point, à un espace linéaire, à un plan et à une droite.

Ainsi que je l'ai rappelé à la fin de mon premier article, M. Butin avait déjà rattaché la transformation (*b*) à la symétrie par rapport à un espace linéaire [1].

On voit que, plus généralement, les similitudes de l'étendue font connaître les transformations de l'espace (non involutives en général) qui associent un semi-plan à un semi-plan et une semi-sphère à une semi-sphère. La transformation la plus générale de cette nature dépend, comme je l'ai dit plus haut, de onze paramètres.

Le groupe ainsi constitué pourrait donner lieu à des recherches d'un certain intérêt : on chercherait, par exemple, à définir le sous-groupe des transformations (à dix paramètres) qui correspondent aux *déplacements* dans l'étendue; on définirait aussi les sous-groupes finis ou non qui correspondent aux sous-groupes de déplacements (groupes de rotations autour de droites ou de plans concourants, groupe des polyèdres réguliers de l'étendue). Je laisserai complètement de côté les questions de cette nature.

11. Une transformation par semi-plans réciproques étant une transformation de contact, il est important de résoudre le problème suivant :

Construire l'élément de contact correspondant à un élément de contact donné. Autrement dit, soient (II) *un semi-plan*, (II′) *le semi-plan réciproque dans*

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1906, p. 19.

l'une des transformations (α), (β), (γ), (δ). *On donne le point* μ *où* (Π) *touche une surface donnée. Construire le point* μ' *où le plan* (Π') *touche la surface réciproque de la première.*

J'établirai, en premier lieu, une proposition qui s'applique à chacune des transformations (α), (β), (γ), (δ).

Si le point μ varie dans le semi-plan (Π), le point μ' varie en même temps dans le semi-plan (Π'). Cherchons la nature de la correspondance qui relie les points μ et μ'.

Il est tout d'abord évident que cette correspondance est algébrique et rationnelle. Remarquons en second lieu que, si le semi-plan (Π) varie en enveloppant une développable, il en est de même du semi-plan (Π'), et les caractéristiques des deux semi-plans se correspondent évidemment. Autrement dit, si le point μ se déplace dans le semi-plan (Π) sur une droite, il en est de même pour le point μ' dans le semi-plan (Π'). On en conclut que la correspondance entre les points μ et μ' est *homographique*.

En outre, si le point μ décrit un cercle dans le semi-plan (Π), le point μ' décrit aussi un cercle dans le semi-plan (Π'). En effet, un cercle peut être caractérisé comme étant, de deux manières différentes, enveloppe d'une famille de sphères : les sphères de l'une des familles sont celles qui passent par le cercle, les autres sont les sphères-points dont le lieu est ce même cercle. L'une quelconque des transformations que nous considérons fait donc correspondre à un cercle une surface enveloppe de sphères de deux manières différentes, c'est-à-dire une *cyclide de Dupin*. Donc, quand le point μ décrit un cercle dans (Π), le point μ' décrit la courbe de contact de (Π') et d'une cyclide de

Dupin. Une telle courbe est nécessairement un cercle, comme il est bien connu.

On voit donc qu'il existe entre les points μ et μ' une correspondance homographique, telle qu'à un cercle quelconque décrit par le point μ correspond un cercle : cette correspondance est donc une *similitude* ; enfin, en raison du caractère involutif des transformations considérées, le rapport k qui définit cette similitude doit satisfaire à la relation

$$k^2 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad k = \pm 1.$$

Ainsi la similitude dont il s'agit est une égalité *directe* ou *inverse* (1).

En résumé, *les points de contact du semi-plan* (II) *avec diverses surfaces et les points de contact du semi-plan* (II) *avec les surfaces qui correspondent aux premières, dans l'une quelconque des transformations* (α), (β), (γ), (δ), *forment des figures directement ou inversement égales* (2).

Cela établi, abordons le problème posé successivement pour chacune des quatre transformations.

1° *Transformation* (α). — Les considérations les plus simples conduisent immédiatement à la solution : on construit dans le semi-plan (II_1) le point μ_1, tel que $\mu\mu_1$ soit perpendiculaire à (II) et (II_1); puis on construit dans le semi-plan (II) le point μ', symétrique du point μ_1 par rapport au point ω.

On voit ainsi que, dans le cas de la transforma-

(1) Comme il s'agit de figures tracées dans des plans orientés, les mots en italique ont un sens.

(2) Les figures formées par les points de contact sont seulement *semblables* et non plus égales, si l'on considère les transformations générales dont il est dit un mot à la fin du n° 10.

tion (α), les points μ et μ_1 engendrent des figures *directement égales*.

2° *Transformation* (β). — Construisons la semi-sphère (Σ), tangente à (Π) en μ_1 et tangente à (Π'). Cette semi-sphère se correspond évidemment à elle-même par la transformation (β) [puisque, si elle touche un semi-plan quelconque (Π_1), elle touche aussi le semi-plan réciproque (Π'_1)]. Son point de contact avec (Π') est donc le point μ' cherché.

On voit que le point μ' est la position prise par le point μ lorsqu'on fait tourner le semi-plan (Π) autour de l'arête du dièdre (Π, Π'), de manière à l'amener en coïncidence avec le semi-plan *opposé* à (Π').

Ainsi, dans le cas de la transformation (β), les figures engendrées par les points μ et μ' sont *inversement égales*.

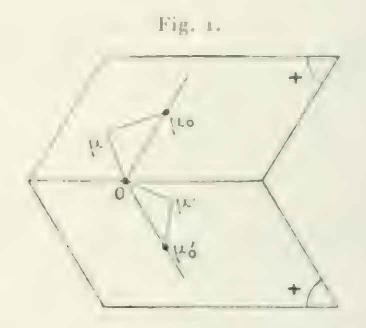
3° *Transformation* (γ). — Remarquons tout d'abord que, dans le cas de la transformation (γ), les points μ et μ' engendrent des figures *directement* égales. En effet, la nature de l'égalité doit être la même pour tous les couples de semi-plans réciproques, par raison de continuité. Or le semi-plan (Π_1) se correspond à lui-même et, de plus, toute semi-sphère touchant les semi-plans (Π_1) et (Π_2) se correspond aussi à elle-même. Si donc les semi-plans (Π) et (Π') viennent se confondre avec (Π_1), les deux points μ et μ' viennent se confondre en un même point, ce qui exige que l'égalité soit *directe*, en ce qui concerne le couple [(Π_1), (Π_1)], et par conséquent en ce qui concerne un couple quelconque.

Il existe une infinité de semi-sphères qui touchent (Π_1), (Π_2), (Π) et (Π'). Chacune de ces semi-sphères

se correspond à elle-même dans la transformation (γ). Si donc le point μ est le point de contact μ_0 avec (H) de l'une de ces semi-sphères, μ' est le point de contact μ'_0 de la même semi-sphère avec (H').

Quand on fait varier la semi-sphère en question, les points μ_0 et μ'_0 décrivent respectivement dans les semi-plans (H) et (H') des semi-droites Ox et Ox', se coupant sur l'arête du dièdre (H, H') et faisant le même angle avec cette arête (*fig.* 1).

Fig. 1.



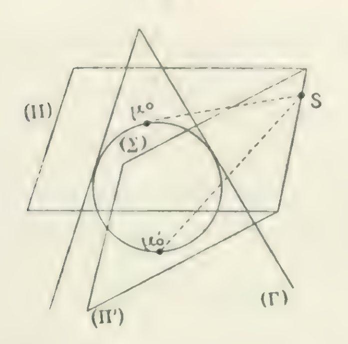
Les points à même distance du point O, sur ces semi-droites, se correspondent entre eux ($O\mu'_0 = O\mu_0$).

Si maintenant le point de contact de (H) avec son enveloppe occupe une position quelconque μ, on construira aisément le point μ', tel que le triangle $O\mu'_0\mu'$ soit directement égal au triangle $O\mu_0\mu$.

4. *Transformation* (δ). — Construisons un semi-cône de révolution (Γ) quelconque circonscrit à la semi-sphère (Σ) (*fig.* 2) et ayant son sommet sur la droite D commune à (H) et à (H') : ce semi-cône se correspond à lui-même dans la transformation (δ) [car tout semi-plan tangent à (Γ) est transformé en semi-plan jouissant de la même propriété]. Soient S le sommet d'un tel cone, μ_0 et μ'_0 les points de contact avec (Σ) des

semi-plans (Π) et (Π'). Les droites $S\mu_0$ et $S\mu'_0$ se correspondent dans les figures engendrées par μ et μ'. On en conclut que la seconde figure s'obtient en faisant

Fig. 2.



tourner le semi-plan (Π') autour de D, de manière à l'amener en coïncidence avec le semi-plan *opposé* à (Π) [1].

Ainsi, dans le cas de la transformation (δ), les points μ et μ' engendrent des figures *inversement égales*.

En terminant, je signalerai encore les faits suivants :

Les transformations (α), (β), (γ), (δ), étant de contact et changeant les sphères en sphères, conservent les lignes de courbure des surfaces. De plus, une sphère *principale*, c'est-à-dire une sphère tangente à une surface et ayant son centre en l'un des centres de courbure principaux de la surface au point de contact, est changée en sphère principale relativement à la surface réciproque de la surface considérée. On a ainsi

---

[1] C'est exactement la même construction que dans le cas de la transformation (β).

le moyen de déterminer les éléments de la courbure d'une surface, réciproque d'une surface donnée dans l'une quelconque des transformations considérées.

[D4b]

SUR UN THÉORÈME DE WEIERSTRASS;

Par M. H. LAURENT.

Considérons une fonction $f(z)$ synectique dans toute l'étendue du plan, soient $a_1 a_2 \dots a_k$ ses zéros de module ρ, $b_1 b_2 \dots b_i$ ses zéros de module ρ', etc., et supposons $f(0)$ différent de zéro et

$$r_1 < \rho < r_2 < \rho' < r_3 < \dots.$$

Considérons la somme

$$\begin{aligned} 2\pi S\sqrt{-1} = \int_{r_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{z-x} &+ \int_{r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x}{z} \frac{dz}{z-x} - \int_{r_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x}{z} \frac{dz}{z-x} \\ &+ \int_{r_3} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^2}{z^2} \frac{dz}{z-x} - \int_{r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^2}{z^2} \frac{dz}{z-x} \\ &+ \int_{r_4} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^3}{z^3} \frac{dz}{z-x} - \int_{r_3} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^3}{z^3} \frac{dz}{z-x} \\ &+ \dots\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

l'indice r_k placé au bas d'une intégrale indiquant qu'elle doit être prise le long d'une circonférence de rayon r_k décrit de l'origine comme centre.

Si l'on remplace les différences successives par leurs valeurs, on trouve dans l'une d'elles ou dans la première intégrale l'expression $2\pi\sqrt{-1}\,\frac{f'(x)}{f(x)}$, puis des expressions de la forme

$$\frac{x^h}{a^h} \frac{1}{a-x} 2\pi\sqrt{-1}$$

[qui devront être répétées α fois si a est racine d'ordre α de $f(x)=0$]. On a donc

$$(1)\qquad s=\frac{f'(x)}{f(x)}+\sum\frac{x}{a}\,\frac{1}{a-x}+\sum\frac{x^2}{b^2}\,\frac{1}{b-x}+\sum\frac{x^3}{c^3}\,\frac{1}{c-x}+\ldots$$

d'un autre côté, s d'après cette formule est une fonction synectique $\varphi(x)$ de x, et l'on peut la développer par la formule de Maclaurin, car on a

$$2\pi\sqrt{-1}\,\frac{d^n s}{dx^n}=n!\int_{r_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\frac{dz}{(z-x)^{n+1}}+\int_{r_2}\frac{f'(z)}{f(z)}\left[n\,\frac{x}{z}\,\frac{1}{(z-x)^{n+1}}+\ldots\right]dz+\ldots$$

et pour $x=0$

$$\frac{1}{x!}\left(\frac{d^n s}{dx^n}\right)_{x=0}=\frac{d^n}{dz^n}\,\frac{f'(z)}{f(z)}+\sum\frac{1}{a^{n+1}}+\sum\frac{1}{b^{n+2}}+\ldots$$

On en déduit le développement de $\varphi(x)$ par la formule de Maclaurin. La formule (1) ou $s=\varphi(x)$ donne alors en intégrant

$$\int_0^x\varphi(x)\,dx=\log\frac{f(x)}{f(0)}-\sum P_1\log\left(1-\frac{x}{a}\right)-\sum P_2\log\left(1-\frac{x}{b}\right)\ldots$$

P_1, P_2, ... désignant des polynomes du degré 1, 2, ... et, par suite,

$$(2)\qquad f(x)=f(0)\,e^{\int_0^x\varphi(x)\,dx}\,\Pi\, e^{P_1}\left(1-\frac{x}{a}\right)\Pi\, e^{P_2}\left(1-\frac{x}{b}\right)\ldots$$

c'est la formule de Weierstrass, et nous avons une expression de la fonction $\varphi(x)$ qui était restée inconnue jusqu'à présent.

Il est bon d'observer que la méthode précédente ne suppose par les zéros de $f(x)$ simples, on peut les supposer d'un ordre de multiplicité quelconque, même négatif, ce qui veut dire que $a, b, c, \ldots$ peuvent être des infinis de $f(x)$, dans ce cas les binomes $\left(1-\frac{x}{a}\right)$, $\left(1-\frac{x}{b}\right)\ldots$ figureront alors en dénominateurs.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1906). SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE [1];

Par M. le Comte de SPARRE.

1. Soient :

OR la trace du plan xOy sur le plan $\xi O\eta$;

OQ la perpendiculaire à OR dans le plan xOy, qui est, par suite aussi, la trace du plan $zO\zeta$ sur le plan xOy;

ψ l'angle de OR avec $O\xi$;

φ celui de Ox avec OR et θ celui de Oz avec $O\zeta$, comptés de gauche à droite, par rapport à $O\zeta$, OZ et OR.

Désignons de plus par p, q, r les composantes de la rotation OR, OQ et OZ [2].

OR, OQ, OZ étant axes principaux d'inertie, si C désigne le moment d'inertie axial, suivant OZ, et A le

---

[1] *Voir* l'énoncé dans le numéro de septembre (p. 410).

[2] Dans l'énoncé on désignait par p et q les composantes de la rotation suivant Ox et Oy, mais il n'y a aucun intérêt à introduire ces composantes, et il vaut mieux considérer celles suivant OR et OQ.

moment d'inertie équatorial, suivant OR et OQ, on a, pour la force vive totale,

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2.$$

D'ailleurs

$$p = \theta', \qquad q = \psi' \sin\theta, \qquad r = \varphi' + \psi' \cos\theta,$$

de sorte que

$$2T = A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)^2.$$

On a ensuite, pour la fonction des forces,

$$U = -\int k M \rho\, d\rho = -\frac{1}{2} k M \rho^2 = -\frac{1}{2} k M d^2 \sin^2\theta.$$

Si l'on désigne par ω et λ les valeurs initiales de r et ψ', on aura alors, en vertu des équations de Lagrange en φ et ψ,

$$(1) \qquad \varphi' + \psi' \cos\theta = \omega,$$

$$(2) \qquad A \sin^2\theta\, \psi' = C\omega(\cos\theta_0 - \cos\theta) + A\lambda \sin^2\theta_0$$

A ces deux équations, on joindra celle des forces vives, qui, en tenant compte de (1), s'écrira

$$(3) \quad \begin{cases} A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) = A(\mu^2 + \lambda^2 \sin^2\theta_0) \\ \qquad\qquad - kM d^2(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0), \end{cases}$$

où μ désigne la valeur initiale de θ'.

Les équations (1), (2) et (3) déterminent θ, φ et ψ en fonction de t, et résolvent par suite la première partie du problème.

En tirant de (2) la valeur de ψ' et la portant dans (3), on aura

$$(4) \quad \begin{cases} A\theta'^2 = A(\mu^2 + \lambda^2 \sin^2\theta_0) + kM d^2(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0) \\ \qquad - \dfrac{[A\lambda \sin^2\theta_0 + C\omega(\cos\theta_0 - \cos\theta)]^2}{A \sin^2\theta}. \end{cases}$$

Le second membre de cette équation est positif pour $\theta = \theta_0$, il est au lieu de cela négatif pour $\theta = 0$, à moins que l'on ait

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & A\lambda \sin^2\theta_0 - C\omega(1 - \cos\theta_0) \\ & \quad = 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\left(2A\lambda\cos^2\frac{\theta_0}{2} - C\omega\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Il est également négatif pour $\theta = \pi$, à moins que l'on ait

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & A\lambda \sin^2\theta_0 + C\omega(1 + \cos\theta_0) \\ & \quad = 2\cos^2\frac{\theta_0}{2}\left(2A\lambda\sin^2\frac{\theta_0}{2} + C\omega\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

On voit qu'en général θ variera d'un maximum à un minimum.

Toutefois, si la condition (5) est satisfaite, on aura

$$(4')\quad \left\{ \begin{aligned} & A\theta'^2 = A(\mu^2 + \lambda^2\sin^2\theta_0) \\ & \qquad + \lambda M d^2(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0) - \frac{C^2\omega^2}{A}\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}, \end{aligned} \right.$$

et θ variera de θ_1 à $-\theta_1$ [1] en passant par zéro.

Si, au lieu de cela, c'était la condition (6) qui était satisfaite, [(5) et (6) ne peuvent être satisfaits en même temps], on aurait

$$(4'')\quad \left\{ \begin{aligned} & A\theta'^2 = A(\mu^2 + \lambda^2\sin^2\theta_0) \\ & \qquad + \lambda M d^2(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0) - \frac{C^2\omega^2}{A}\cot^2\frac{\theta}{2}, \end{aligned} \right.$$

et θ varierait de θ_2 à $2\pi - \theta_2$ [2] en passant par π.

2. Si l'axe du solide est placé perpendiculairement

---

[1] θ_1 étant la racine comprise entre 0 et π du second membre de (4') égalé à zéro.

[2] θ_2 étant la racine comprise entre 0 et π du second membre de (4'') égalé à zéro.

à $O\zeta$ et que l'on imprime au solide une rotation autour de OZ, on aura

$$\theta = 90^\circ, \qquad \mu = \lambda = 0,$$

et, par suite, (4) devient

$$A\theta'^2 = \cos^2\theta\left(kMd^2 - \frac{C^2\omega^2}{A\sin^2\theta}\right)$$

$$= \frac{\cot^2\theta}{A}(kMd^2A - C^2\omega^2 - kMAd^2\cos^2\theta),$$

et la valeur initiale de $\theta = 90^\circ$; cette équation ne peut être satisfaite que pour

$$\theta = 90^\circ, \qquad \theta' = 0.$$

Si l'on a

$$(7) \qquad \omega^2 > \frac{kMd^2A}{C^2};$$

donc, dans ces conditions, on aura indéfiniment, pendant toute la suite du mouvement,

$$\theta' = 0, \qquad \theta = 90^\circ.$$

On peut d'ailleurs facilement vérifier que, si l'on dérange légèrement l'axe en donnant à μ et λ des valeurs très petites, et prenant de plus $\theta_0 = 90^\circ + \varepsilon_0$, où ε_0 est très petit, θ restera toujours très voisin de 90° pendant toute la suite du mouvement.

Posons, en effet,

$$\theta = 90^\circ + \varepsilon.$$

Si nous négligeons les termes en ε^3, ainsi que ceux en $\lambda\varepsilon^2$, on aura

$$A\frac{d\varepsilon^2}{dt^2} = A(\mu^2 + \lambda^2) - kMd^2(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2) - \frac{[A\lambda - C\omega(\varepsilon_0 - \varepsilon)]^2}{A},$$

ce qui peut s'écrire

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varepsilon^2}{dt^2} &= \mu^2 - \left(\frac{k\,\mathrm{M}\,d^2}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{C}^2\omega^2}{\mathrm{A}^2}\right)\varepsilon_0^2 + \frac{2\lambda\,\mathrm{C}\omega}{\mathrm{A}}\varepsilon_0 \\ &\quad - \frac{2\,\mathrm{C}\omega}{\mathrm{A}}\left(\lambda - \frac{\mathrm{C}\omega}{\mathrm{A}}\varepsilon_0\right)\varepsilon - \left(\frac{\mathrm{C}^2\omega^2}{\mathrm{A}^2} - \frac{k\,\mathrm{M}\,d^2}{\mathrm{A}}\right)\varepsilon^2.\end{aligned}\right.$$

Si nous supposons la condition (7) satisfaite, les racines du second membre sont réelles, car ce second membre est positif pour $\varepsilon = \varepsilon_0$, et, au lieu de cela, négatif pour $\varepsilon = \pm\infty$.

Si donc, on désigne par τ_1 et τ_{11} ces deux racines, τ_1 étant la plus grande, on devra avoir

$$\tau_1 > \varepsilon > \tau_{11};$$

de plus, si

$$(9)\qquad n^2 = \frac{\mathrm{C}^2\omega^2}{\mathrm{A}^2} - \frac{k\,\mathrm{M}\,d^2}{\mathrm{A}}$$

n'est pas lui-même très petit, les racines τ_1 et τ_{11} seront elles-mêmes très petites, car nous supposons ε_0, μ et λ aussi très petits. En effet, pour $\mu = \lambda = \varepsilon_0 = 0$, τ_1 et τ_{11} sont tous deux nuls.

Donc, θ reste très voisin de 90° lorsqu'on trouble très peu le mouvement.

Si d'ailleurs on néglige, ainsi que nous l'avons fait, les termes en ε^3, on aura, en vertu de (8) et (9),

$$\begin{aligned} n\,dt &= \frac{\pm\, d\varepsilon}{\sqrt{(\tau_1 - \varepsilon)(\varepsilon - \tau_{11})}} \\ &= \pm \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\left(\dfrac{\tau_1 - \tau_{11}}{2}\right)^2 - \left(\varepsilon - \dfrac{\tau_1 + \tau_{11}}{2}\right)^2}}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en supposant $t = t_0$ pour $\varepsilon = \tau_1$,

$$n(t - t_0) = \arccos\left(\frac{\varepsilon - \dfrac{\tau_1 + \tau_{11}}{2}}{\dfrac{\tau_1 - \tau_{11}}{2}}\right)$$

ou

$$(10)\qquad \varepsilon = \frac{\eta_1 + \eta_{11}}{2} + \frac{\eta_1 - \eta_{11}}{2} \cos n(t - t_0).$$

On aura ensuite, avec la même approximation,

$$d\psi = \frac{C\omega}{A}(\varepsilon - \varepsilon_0)\,dt + \lambda\,dt.$$

C'est-à-dire, en tenant compte de (10),

$$\frac{d\psi}{dt} = \lambda + \frac{C\omega}{A}\left(\frac{\eta_1 + \eta_{11}}{2} - \varepsilon_0\right) - \frac{C\omega}{2A}(\eta_1 - \eta_{11}) \cos n(t - t_0).$$

Mais

$$\frac{\eta_1 + \eta_{11}}{2} = -\frac{C\omega}{A n^2}\left(\lambda - \frac{C\omega}{A}\varepsilon_0\right), \qquad n^2 = \frac{C^2\omega^2}{A^2} - \frac{kMd^2}{A},$$

de sorte que

$$\lambda + \frac{C\omega}{A n^2}\left(\frac{\eta_1 + \eta_{11}}{2} - \varepsilon_0\right) = \frac{kMd^2A}{C^2\omega^2 - kMd^2A}\left(\frac{C\omega\varepsilon_0}{A} - \lambda\right),$$

$$\psi - \psi_0 = \frac{kMd^2A}{C^2\omega^2 - kMd^2A}\left(\frac{C\omega\varepsilon_0}{A} - \lambda\right)t$$
$$- \frac{C\omega}{2nA}(\eta_1 - \eta_{11}) \sin n(t - t_0).$$

On voit que, si le solide est dérangé tant soit peu de sa position d'équilibre, qui correspond à

$$\varepsilon_0 = \lambda = \mu = 0,$$

θ restera très voisin de 90°, mais l'axe aura un mouvement de rotation très lent, le mouvement de précession moyen ayant lieu toujours dans le même sens, à moins que l'on ait

$$\frac{C\omega\varepsilon_0}{A} = \lambda,$$

auquel cas il y aurait un simple mouvement d'oscillation, la condition (7) étant supposée remplie.

Si, au lieu de cela, on avait

$$\omega^2 < \frac{kMd^2A}{C^2},$$

on tomberait sur les fonctions exponentielles au lieu des fonctions circulaires, et, par suite, ε ne resterait pas très petit, quelque faible que fût le déplacement initial, et la rotation ne serait par suite pas stable.

On doit remarquer d'ailleurs qu'il faut non seulement que

$$C^2\omega^2 - kMd^2A$$

soit positif, mais que de plus ce ne soit pas une quantité très petite de l'ordre de λ, μ et ε_0, car, s'il en était ainsi, η et η_1 ne seraient plus très petits.

3. Pour que θ tende vers $90°$, pour t infini, il faut que $\theta = 90°$ soit racine double du second membre de l'équation (4).

D'abord, pour que ce second membre soit nul pour $\theta = 90°$, il faut

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &A(\mu^2 - \lambda^2\sin^2\theta_0) - kMd^2\cos^2\theta_0 \\ &\qquad - \frac{(A\lambda\sin^2\theta_0 + C\omega\cos\theta_0)^2}{A} = 0 \end{aligned}\right.$$

En tenant compte de cette relation, l'équation (4) s'écrira

$$(12)\quad A\theta'^2 = \cos\theta\left[kMd^2\cos\theta - \frac{\left\{\begin{aligned}&(A\lambda\sin^2\theta_0 + C\omega\cos\theta_0)^2\cos\theta \\ &\quad - 2C\omega(A\lambda\sin^2\theta_0 + C\omega\cos\theta_0) + C^2\omega^2\cos\theta\end{aligned}\right\}}{A\sin^2\theta}\right].$$

Mais $\theta = 90°$ devant être racine double de la valeur de θ'^2, la quantité entre crochets doit être nulle pour $\theta = 90°$, ce qui exige

$$(13)\quad A\lambda\sin^2\theta_0 + C\omega\cos\theta_0 = 0.$$

Mais, si l'on tient compte de cette relation, l'équation (11) devient

$$(14)\qquad \mu^2 + \lambda^2 \sin^2\theta_0 - \frac{k\,\mathrm{M}\,d^2}{\mathrm{A}} \cos^2\theta_0 = 0.$$

Si l'on suppose ω et θ_0 donnés, on déduira de (13) et (14)

$$(15)\qquad \lambda = \frac{\mathrm{C}\omega \cos\theta_0}{\mathrm{A}\sin^2\theta_0},$$

$$(16)\qquad \mu^2 = \frac{\cos^2\theta_0}{\mathrm{A}^2}\left(\mathrm{A}\,k\,\mathrm{M}\,d^2 - \frac{\mathrm{C}^2\omega^2}{\sin^2\theta_0}\right).$$

Pour que cette valeur de μ soit acceptable, il faut

$$(17)\qquad \omega^2 < \frac{k\,\mathrm{M}\,d^2\,\mathrm{A}\sin^2\theta_0}{\mathrm{C}^2}.$$

Si cette condition est remplie, on aura deux valeurs de μ égales et de signes contraires répondant à la question et une seule valeur de λ.

Si l'on tient compte des relations (13) et (14) la valeur (12) de θ'^2 peut s'écrire

$$\mathrm{A}\sin^2\theta\,\theta'^2 = \cos^2\theta\left(k\,\mathrm{M}\,d^2 - \frac{\mathrm{C}^2\omega^2}{\mathrm{A}} - k\,\mathrm{M}\,d^2\cos^2\theta\right),$$

ce qui peut s'écrire

$$(18)\qquad \frac{-\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{\left(\frac{k\,\mathrm{M}\,d^2}{\mathrm{A}} - \frac{\mathrm{C}^2\omega^2}{\mathrm{A}^2}\right)\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{k\,\mathrm{M}\,d^2}{\mathrm{A}}}} = dt,$$

formule dans laquelle, en vertu de (17), on a

$$\frac{k\,\mathrm{M}\,d^2}{\mathrm{A}} - \frac{\mathrm{C}^2\omega^2}{\mathrm{A}^2} > 0.$$

Posons maintenant

$$x^2 = \frac{k\,\mathrm{M}\,d^2\,\mathrm{A} - \mathrm{C}^2\omega^2}{\mathrm{A}^2}, \qquad \text{séc}^2\theta_1 = \frac{k\,\mathrm{M}\,d^2\,\mathrm{A}}{k\,\mathrm{M}\,d^2\,\mathrm{A} - \mathrm{C}^2\omega^2}.$$

la formule (18) deviendra

$$(19) \qquad \alpha\, dt = \pm \frac{d\,\text{séc}\,\theta}{\sqrt{\text{séc}^2\theta - \text{séc}^2\theta_1}},$$

formule dans laquelle il faudra prendre le signe + si θ croît avec t, donc si μ est positif et le signe − si θ décroît lorsque t croît, donc si μ est négatif. On aura donc

$$(20) \qquad \pm \alpha t = \text{L}\,\frac{\text{séc}\,\theta + \sqrt{\text{séc}^2\theta - \text{séc}^2\theta_1}}{\text{séc}\,\theta_0 + \sqrt{\text{séc}^2\theta_0 - \text{séc}^2\theta_1}}.$$

On a d'ailleurs, en vertu de (17),

$$\sin^2\theta_0 > \frac{C^2\omega^2}{k\,M\,d^2\,\Lambda},$$

et l'on en déduit

$$\cos^2\theta_0 < \frac{k\,M\,d^2\,\Lambda - C^2\omega^2}{k\,M\,d^2\,\Lambda} = \cos^2\theta_1;$$

donc

$$\theta_0 > \theta_1.$$

Posons maintenant de nouveau

$$\alpha t_1 = \text{L}\,\frac{\text{séc}\,\theta_0 + \sqrt{\text{séc}\,\theta_0 - \text{séc}^2\theta_1}}{\text{séc}\,\theta_1},$$

t_1 étant par suite positif en vertu de (19).

Nous aurons alors

$$\alpha(t_1 + t) = \text{L}\,\frac{\text{séc}\,\theta + \sqrt{\text{séc}^2\theta - \text{séc}^2\theta_1}}{\text{séc}\,\theta_1},$$

d'où l'on déduit

$$\text{séc}\,\theta = \frac{\text{séc}\,\theta_1}{2}\left(e^{\alpha(t_1+t)} + e^{-\alpha(t_1+t)}\right)$$

ou

$$(21) \qquad \cos\theta = \frac{2\cos\theta_1}{e^{\alpha(t_1+t)} + e^{-\alpha(t_1+t)}}.$$

Si μ est positif, auquel cas il faut prendre le signe $+$, lorsque t croîtra de o à ∞, $\cos\theta$ décroîtra de $\cos\theta_0$ à zéro, et, par suite, θ croîtra de θ_0 à $90°$. Si, au lieu de cela, μ est négatif, il faudra prendre le signe $-$, et lorsque t croît de o à t_1, $\cos\theta$ croît de $\cos\theta_0$ à $\cos\theta_1$, et, par suite, θ décroît de θ_0 à θ_1, puis, lorsque t croît de t_1 à ∞, $\cos\theta$ décroît de $\cos\theta_1$ à o, et θ croît par suite de θ_1 à $90°$.

On aura ensuite, pour le calcul de ψ, en tenant compte de (13),

$$d\psi = -\frac{C\omega\cos\theta}{A\sin^2\theta}\,dt,$$

ou, en vertu de (19),

$$d\psi = \pm\frac{C\omega}{A\alpha}\,\frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{1-\text{séc}^2\theta_1\cos^2\theta}}.$$

Mais

$$\text{tang}\,\theta_1 = \frac{C\omega}{A\alpha},$$

de sorte que l'on peut écrire

$$d\psi = \mp\,\text{tang}\,\theta_1\,\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\text{séc}^2\theta_1\cot^2\theta}}$$

ou

$$d\psi = \pm\frac{\text{tang}\,\theta_1\,d(\cot\theta)}{\sqrt{1-\text{tang}^2\theta_1\cot^2\theta}};$$

on en déduit

$$\psi - \psi_1 = \pm\,\text{arc}\cos(\text{tang}\,\theta_1\cot\theta)\ (^1)$$

ou

(22) $$\text{tang}\,\theta_1\cot\theta = \cos(\psi-\psi_1).$$

Supposons maintenant que l'on ait pris, pour plan

---

(1) ψ_1 étant par suite la valeur de ψ qui correspond à $\theta = 0$.

$\zeta O \xi$, celui dans lequel se trouve l'axe OZ pour $\theta = \theta_1$, auquel cas on a

$$\psi_1 = 90°.$$

L'équation (22) devient

(22') $$\tang \theta = \frac{\tang \theta_1}{\sin \psi}.$$

Si d'ailleurs ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point de OZ, on a

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \sin \theta \cos(\psi - 90°) = \rho \sin \theta \sin \psi, \\ \eta &= \rho \sin \theta \sin(\psi - 90°) = -\rho \sin \theta \cos \psi, \\ \zeta &= \rho \cos \theta, \end{aligned}$$

avec

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

et l'équation (22') revient à

$$\frac{\xi}{\zeta} = \tang \theta_1,$$

ou

(23) $$\xi = \zeta \tang \theta_1.$$

Le lieu de OZ est donc un plan.

On a ensuite

$$\varphi' = \omega - \psi' \cos \theta,$$

donc

$$d\varphi = \omega\, dt - \cos \theta\, d\psi = \omega\, dt \mp \frac{\tang \theta_1 \cos \theta\, d\theta}{\sin \theta \sqrt{1 - \sec^2 \theta_1 \cos^2 \theta}}$$

ou

$$d\varphi = \omega\, dt \mp \frac{\tang \theta_1\, d(\operatorname{cos\acute{e}c} \theta)}{\sqrt{\operatorname{cos\acute{e}c}^2 \theta - \sec^2 \theta_1 \cot^2 \theta}},$$

ou enfin

$$d\varphi = \omega\, dt \mp \frac{\sin \theta_1\, d(\operatorname{cos\acute{e}c} \theta)}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 \operatorname{cos\acute{e}c}^2 \theta}}.$$

Donc, en définitive,

$$\varphi - \varphi_1 = \omega(t - t_1) \pm \arc\cos\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta}\right) \text{ (1)}.$$

4. Dans le cas particulier on a

$$C = 2ml^2,$$

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\,ml^2 - m\,\frac{l^2}{2}\right) = 2ml^2 = C,$$

$$M = 2m.$$

L'ellipsoïde d'inertie pour le point O est donc dans ce cas une sphère.

De plus

$$d^2 = \frac{l^2}{2}, \qquad k\,d^2 = l^2, \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

de sorte que

$$k\,M\,d^2\,A = 4\,m^2\,l^4,$$
$$C^2\omega^2 = 2\,m^2\,l^4,$$

et l'on en déduit

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}, \qquad \text{séc}^2\theta_1 = 2, \qquad \theta_1 = 45^\circ.$$

L'équation du plan lieu de OZ est donc, avec le choix que nous avons fait du plan $\zeta O \xi$,

$$\zeta = \xi.$$

De plus, on a

$$\cot\theta = \sin\psi,$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{t_1 \pm t}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{t_1 \pm t}{\sqrt{2}}}},$$

$$\varphi = \omega t \pm \arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta}\right),$$

$$t_1 = \sqrt{2}\,L\,\frac{\text{séc}\,\theta_0 - \sqrt{\text{séc}^2\theta_0 - 2}}{\sqrt{2}}.$$

---

(1) φ_1 étant la valeur de φ pour $\theta = \theta_1$ et t_1 la valeur correspondante de t.

On voit en définitive que ce cas ne présente rien de remarquable; toutefois, l'ellipsoïde d'inertie étant une sphère, le théorème des mouvements des quantités de mouvement appliqué par rapport à $O\zeta$ donne

$$A(\psi' + \varphi' \cos\theta) = \text{const.},$$

donc

$$\psi' + \varphi' \cos\theta = \text{const.} = 0\ (^1).$$

Il est facile de vérifier ce fait, on a en effet dans ce cas

$$\psi' = -\frac{\omega \cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\varphi' = \omega - \psi' \cos\theta = \frac{\omega}{\sin^2\theta},$$

d'où l'on déduit

$$\psi' + \varphi' \cos\theta = 0.$$

Donc, si l'on décompose la rotation instantanée suivant les trois directions fixes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, la composante suivant $O\zeta$ est nulle. On conclut de là que le lieu de l'axe instantané par rapport aux axes fixes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ est le plan $O\xi\eta$.

Il semble que ce soit la seule particularité qui se présente dans ce cas particulier.

5. Si l'on imprime au solide une percussion perpendiculaire au plan $ZO\zeta$, donc parallèle à OR, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport

---

(1) On a en effet

$$\psi'_0 = \lambda, \qquad \varphi'_0 = \omega - \lambda \cos\theta_0,$$

et, par suite,

$$\psi'_0 + \varphi'_0 \cos\theta_0 = \lambda \sin^2\theta_0 + \omega \cos\theta_0 = 0,$$

en vertu de l'équation (13) qui, si A = C, se réduit bien à

$$\lambda \sin^2\theta_0 + \omega \cos\theta_0 = 0.$$

à OR ne changera pas, et, comme cette somme est $A\theta'$, la valeur de θ' ne changera pas pendant la percussion.

Or nous pouvons prendre comme instant initial du mouvement précédant la percussion un moment quelconque de ce mouvement, et, si nous prenons celui qui précède immédiatement l'instant où la percussion se produit, on aura, au moment de la percussion,

$$\theta' = \mu, \qquad \psi' = \lambda.$$

Or, d'après ce que nous venons de dire, θ' ne change pas pendant la percussion. On aura donc encore, après cette percussion,

$$\theta' = \mu.$$

Si d'ailleurs λ_1 désigne la valeur de λ et ω_1 celle de ω, après la percussion, on devra avoir, d'après ce que nous avons vu, pour que, dans le mouvement subséquent, OZ tende vers une position particulière perpendiculaire à $O\zeta$ (¹),

$$\lambda_1 = -\frac{C\omega_1\cos\theta_0}{A\sin^2\theta_0},$$

$$\mu^2 = \frac{\cos^2\theta_0}{A^2}\left(A k M d^2 - \frac{C^2\omega_1^2}{\sin^2\theta_0}\right) \text{ (²)}.$$

Ces équations doivent ici servir à déterminer ω_1 et λ_1. D'ailleurs ω et λ (valeurs avant la percussion) vérifient, en vertu des relations (15) et (16), les équations

$$\lambda = -\frac{C\omega\cos\theta_0}{A\sin^2\theta_0}, \qquad \mu^2 = \frac{\cos^2\theta_0}{A^2}\left(A k M d^2 - \frac{C^2\omega^2}{\sin^2\theta_0}\right).$$

(¹) Équations (15) et (16).

(²) θ_0 désigne ici la valeur de θ au moment où la percussion se produit.

On déduit par suite de là

$$\omega_1 = \pm \omega, \qquad \lambda_1 = \pm \lambda,$$

les signes se correspondant.

Comme on ne peut prendre $\omega = \omega_1$, $\lambda = \lambda_1$, car il faudrait alors qu'il n'y eût pas de percussion, on devra prendre

$$\omega = -\omega_1, \qquad \lambda = -\lambda_1.$$

Désignons alors par P la percussion et par u et v les coordonnées de son point d'application dans le plan QOZ, par rapport aux axes OQ et OZ, le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à OQ et OZ donnera, si l'on désigne par ψ'_1 et r_1 les valeurs de ψ' et r après la percussion,

$$A \sin\theta_0 (\psi' - \psi'_1) - P v = 0 \ (^1),$$
$$C (r - r_1) = P u.$$

D'ailleurs, d'après ce que nous venons de dire, on a

$$\psi' = \lambda = -\psi'_1, \qquad r = \omega = -r_1.$$

On aura donc

$$2 A \lambda \sin\theta_0 - P v = 0,$$
$$2 C \omega - P u = 0,$$

et l'on en déduit

(24) $$C \omega v - A \lambda \sin\theta_0 u = 0.$$

Mais les composantes de la rotation instantanée dans le plan ZOQ sont

$$\omega \quad \text{et} \quad \lambda \sin\theta_0,$$

suivant OZ et OQ.

---

(1) θ_0 désignant toujours ici la valeur de θ au moment où la percussion se produit.

De sorte que l'équation de la projection de l'axe instantané sur le plan ZOQ est

$$(25) \qquad v = \frac{\omega}{\lambda \sin\theta_0} u;$$

de plus, l'équation de la section de l'ellipsoïde d'inertie par le plan ZOR est

$$(26) \qquad Au^2 + Cv^2 = 1,$$

et l'équation du diamètre conjugué de la direction (25) dans l'ellipse (26) sera précisément la droite (24).

Donc, pour que le mouvement qui se produit après la percussion, OZ, tende vers une position limite perpendiculaire à Oζ, il faut que cette percussion soit appliquée suivant une ligne d'action qui est le diamètre conjugué, dans la section de l'ellipsoïde d'inertie par le plan ZOζ, de la composante de la rotation instantanée dans ce plan, au moment où la percussion se produit.

Quant au mouvement subséquent qui se produit après la percussion, comparé à celui qui se serait produit sans l'intervention de la percussion, il en diffère, d'après ce que nous avons vu, par le changement de ω en $-\omega$, et de λ en $-\lambda$.

Or, dans l'expression de θ', ω ne figure que par son carré [1], donc les valeurs de θ seront les mêmes dans les deux cas, puisque θ part de la même valeur initiale.

Au lieu de cela, les valeurs de ψ' seront égales et de signes contraires, et il en sera de même de celles de φ'.

---

[1] Il faut d'ailleurs prendre dans les deux cas le même signe dans l'expression de θ', puisque la percussion ne modifie pas cette quantité.

Il résulte de là que, si ζ_0 est la valeur initiale de ζ au moment où la percussion se produit, on devra, pour passer d'un mouvement à l'autre, remplacer $\zeta - \zeta_0$ par $\zeta_0 - \zeta$, et, de plus, les composantes de la rotation suivant OZ seront égales et de sens contraire.

On conclut de là que le nouveau déplacement de l'axe OZ, après la percussion, sera symétrique par rapport au plan passant par $O\zeta$, et la position de OZ au moment où la percussion se produit, de celui que OZ aurait pris sans la percussion.

Remarque. — Je crois devoir faire suivre cette solution de la remarque suivante : ce problème est sans aucun doute très bien choisi et intéressant, mais on ne s'explique pas très bien pourquoi l'on a ajouté le n° 4, en demandant l'étude du mouvement dans ce cas particulier, et en se bornant à en demander ses circonstances principales dans le cas général (n° 3). Le cas général se traite en effet tout aussi simplement que ce cas particulier, et les résultats sont tout aussi simples.

Il semble qu'il n'y ait autre chose à faire que de traiter d'une façon complète, ainsi que je l'ai fait, le cas général (n° 3), et d'appliquer ensuite les résultats au cas particulier (n° 4), en se bornant à constater qu'il ne présente rien de spécial.

Si, au lieu de cela, on suivait la marche que semblent indiquer les données, en se bornant à une étude sommaire du cas général, et en traitant complètement le cas particulier, on serait, pour cette étude du cas particulier, conduit aux mêmes calculs que l'on aurait eu à faire pour traiter complètement le cas général, et l'on aurait été conduit à traiter successivement deux questions qui n'en font au fond qu'une.

Il y a lieu aussi de remarquer que la note qui suivait l'énoncé indiquait de considérer les composantes

de la rotation suivant Ox et Oy, tandis qu'il était plus simple de considérer, ainsi que je l'ai fait, les composantes suivant OR et OQ, d'autant plus que l'on était par là plus naturellement conduit à reconnaître que, dans le n° 5, la ligne d'action de la percussion doit être le diamètre conjugué de la composante de la rotation dans le plan ZOQ.

CORRESPONDANCE.

Un abonné. — Voici quelques remarques sur la question 2019 résolue à la page 334 de ce Volume. Soient b^2 et c'^2, c^2 et a'^2, a^2 et b'^2 les carrés des demi-axes des coniques U, V, W situées dans les plans yOz, zOx, xOy. En partant de la conique W pour arriver à la conique V, on trouve

$$(\text{V, W}) \qquad l^2 = b'^2 + c^2, \qquad \frac{a'^2}{c^2} + \frac{a^2}{b'^2} = 1;$$

cette dernière relation est la condition à laquelle doivent satisfaire les rapports $\frac{a'^2}{c^2}$, $\frac{a^2}{b'^2}$, *pour que les deux coniques* V *et* W *admettent une infinité de normales communes.*

On a de même

$$(\text{W, U}) \qquad m^2 = c'^2 - a^2, \qquad \frac{b'^2}{a^2} + \frac{b^2}{c'^2} = 1.$$

L'élimination du rapport $\frac{a^2}{b'^2}$ donne précisément la relation qui assure une infinité de normales communes aux deux coniques U et V; on a ainsi

$$(\text{U, V}) \qquad n^2 = a'^2 - b^2, \qquad \frac{c'^2}{b^2} + \frac{c^2}{a'^2} = 1.$$

La relation (V, W) peut s'écrire

$$\frac{a'^2 b'^2}{a^2 c^2} + 1 = \frac{b'^2}{a^2};$$

on a donc, en tenant compte de (W, U),

$$a^2 b'^2 c''^2 - a'^2 b''^2 c^2 = 0;$$

les coniques U, V, W ne peuvent pas être toutes trois des ellipses.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2031.

([illegible])

Démontrer la relation

$$\sum \frac{f''(a)}{f'^2(a)} + \sum \frac{1}{f(\alpha)} = 0.$$

La première somme s'étendant à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation algébrique

$$f(x) = 0$$

et la seconde somme à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation

$$f'(x) = 0;$$

$f'(x)$ et $f''(x)$ désignent les dérivées première et seconde du polynome $f(x)$. R. Bricard.

PREMIÈRE SOLUTION

Par M. Parrod

Soit

$$f'(x) = \prod (x - \alpha);$$

on a

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \sum \frac{1}{x - \alpha};$$

par suite,

$$\sum \frac{f''(a)}{f'^2(a)} = \sum \sum \frac{1}{f'(a)(a - \alpha)}.$$

D'autre part

$$\frac{1}{f(x)} = \sum \frac{1}{f'(a)(x-a)};$$

donc

$$-\sum \frac{1}{f(\alpha)} = \sum \sum \frac{1}{f'(a)(a-\alpha)}.$$

Les deux sommes doubles étant égales, la relation est établie.

DEUXIÈME SOLUTION

Par M. NICOLAS KRYLOFF.

La question se résout élégamment à l'aide du théorème suivant (*Cours de Hermite*, 4ᵉ éd., p. 172) de Cauchy. Si $F(z)$ est finie, continue et uniforme à l'intérieur du contour S, l'intégrale

$$\int_S \frac{F(z)g'(z)\,dz}{g(z)}$$

est égale au produit de $2i\pi$ par la somme des valeurs de $F(z)$, qui correspondent aux racines de $g(z) = 0$, comprises à l'intérieur du contour S, en tenant compte de leur multiplicité.

Or, en supposant, en premier lieu,

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} \qquad \text{et} \qquad g(z) = f'(z);$$

nous voyons que $2i\pi \sum \frac{1}{f(\alpha)}$ est égal à

$$\int_S \frac{f''(z)\,dz}{f(z)f'(z)};$$

de l'autre côté $\sum \frac{f''(a)}{f'^2(a)}$ est égal, en prenant

$$F(z) = \frac{f''(z)}{f'^2(z)} \qquad \text{et} \qquad g(z) = f(z),$$

à l'intégrale

$$\int_S \frac{f''(z)f'(z)\,dz}{f'^2(z)f(z)} = \int_S \frac{f''(z)\,dz}{f'(z)f(z)},$$

c'est-à-dire que la somme totale est égale au produit de $2i\pi$ par

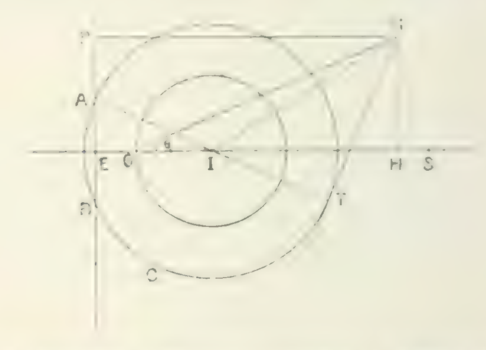
$$\int_{SS_1} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)\,f(z)},$$

lequel est bien égal à o, comme étant égal à moins l'intégrale curviligne d'une fonction, holomorphe évidemment à l'extérieur des courbes SS_1, et par suite égal à zéro.

Autres solutions de MM. Letierce et Sicard.

2032.

On considère une cardioïde dont le sommet est S, *dont le point de rebroussement est* O *et dont les points de contact de la tangente perpendiculaire à* OS *sont* A *et* B. *On prend le point* I *situé entre* O *et* S *et tel que* $OI = \frac{OS}{4}$. *On décrit le cercle* C *de centre* I *et de rayon* IA.



Soient T *le point de contact d'une des tangentes au cercle* C, *issues d'un point quelconque* M *de la cardioïde, et* P *la projection de* M *sur la droite* AB. *Démontrer que, quel que soit* M, *on a*

$$8\,\overline{MT}^4 = \overline{OS}^3 \cdot \overline{MP},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\overline{MT}^4}{\overline{MP}} = \text{const.}$$

(E.-N. Barisien).

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

Posons

$$OS = 2a;$$

le point I est le centre du cercle générateur de la cardioïde considérée comme une conchoïde de cercle; on trouve aisément que la droite AB coupe OS en E tel que $OE = \frac{a}{4}$. Joignons IM, IT, posons $\widehat{SOM} = \theta$; nous avons

$$(1) \qquad \overline{MT}^2 = \overline{IM}^2 - \overline{IT}^2.$$

Or, dans le triangle OIM, on a

$$\overline{IM}^2 = \frac{a^2}{4} + a^2(1 + \cos\theta)^2 - a^2\cos\theta(1 - \cos\theta)$$

ou

$$\overline{IM}^2 = \frac{a^2}{4}(5 - 4\cos\theta).$$

D'un autre côté

$$\overline{IT}^2 = \overline{IA}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{EI}^2 = \overline{EA}^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4}\right)^2.$$

Mais on trouve aisément que la tangente double AB a son point de contact A tel que $EA = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Dès lors

$$\overline{IT}^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} = \frac{3a^2}{4}.$$

Remplaçant $\overline{IM}^2$ et $\overline{IT}^2$ par leurs valeurs dans (1), on obtient

$$\overline{MT}^2 = \frac{a^2}{4}(5 - 4\cos\theta) - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2}(1 - 2\cos\theta);$$

MH étant la perpendiculaire abaissée de M sur OS, nous

avons

$$MP = HE - a(1 - 4\cos\theta)\cos\theta - \frac{a}{4},$$

$$MP = \frac{a}{4}(1 - 4\cos\theta + 4\cos^2\theta) = \frac{a}{4}(1 - 2\cos\theta)^2.$$

En comparant les valeurs de $\overline{MT}^2$ et MP on en déduit

$$\frac{\overline{MT}^2}{MP} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{a}{4}} = a^3$$

et comme $a = \frac{OS}{2}$, il vient finalement

$$\frac{\overline{MT}^2}{MP} = \frac{\overline{OS}^3}{8} = \text{const.}$$

Autres solutions par MM. Letierce, Lez, Valère Mars, Retali, J. Rose.

2034.

([illegible])

Soit dans un cercle une corde AF *perpendiculaire au diamètre* BC. *On prend une parabole de foyer* F *tangente aux côtés du triangle* ABC *et un cercle de centre* A *tangent à* BC; *en dehors de* BC, *les tangentes communes à ce cercle et à cette parabole forment un triangle équilatéral.*

Mannheim.

SOLUTION

Par M. Parrod.

La corde AF rencontre BC en un point H qui est le point de contact du cercle; soient E et G les points où deux tangentes communes rencontrent la droite BC; il suffit de montrer que l'angle M qu'elles forment est égal à 60°.

Le quadrilatère FEMG est inscriptible; donc

$$M + \widehat{EAG} = 180°,$$

ou

$$M + 90° + \frac{M}{2} = 180°$$

Donc

$$M = 60^\circ.$$

Autres solutions de MM. Gisolf, Barisien et Laureaux.

2037.

(1906, p. 96.)

Soit ABCD *un tétraèdre orthocentrique dont l'orthocentre est* H. *Si un point* M *est tel que ses projections sur les plans des quatre faces du tétraèdre soient dans un même plan, ce plan partage le segment* MH *dans le rapport de* 1 *à* 2. (G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

La proposition à démontrer est analogue à la suivante : *La droite de Simson d'un point* M *du cercle circonscrit à un triangle d'orthocentre passe* H *par le milieu de la droite* MH.

On peut la démontrer par des considérations analogues.

Si l'on considère un tétraèdre orthocentrique ABCD, le lieu des points M tels que les projections de ce point sur les faces du tétraèdre soient dans un même plan n'est autre que le lieu des foyers des paraboloïdes de révolution inscrits dans le tetraèdre, les plans précédents étant les plans tangents au sommet de ces paraboloïdes.

Or on sait que le plan orthoptique d'un paraboloïde inscrit à un tétraèdre orthocentrique passe par l'orthocentre de ce tétraèdre (*voir*, par exemple, Duporcq, *Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 118), ce qui démontre la proposition.

QUESTIONS.

2046. Soit $\Delta(\lambda\mu\nu)$ la droite de Simson relative à un point O du cercle ABC. Les parallèles à OA, OB, OC, menées par l'orthocentre O′ de ABC, coupent BC, CA, AB en λ', μ', ν' et l'on a la droite $\Delta'(\gamma'\mu'\nu')$. Les droites Δ, Δ' se coupent sur le cercle d'Euler au milieu de OO′. (P. Sondat.)

2047. Soient C_1, C_2, C_3, C_4 quatre cycles d'un même plan, D_{ij} et D'_{ij} les tangentes communes aux cycles C_i et C_j.

Si les quatre semi-droites D_{12}, D_{23}, D_{34}, D_{41} sont tangentes à un même cycle, il en est de même des quatre semi-droites D'_{12}, D'_{23}, D'_{34}, D'_{41}. (R. B.)

2048. Étant donné un triangle ABC, on mène par le milieu α de la hauteur AA' une demi-droite faisant avec αA' un angle égal à la différence des angles $\widehat{BAA'}$, $\widehat{A'AC}$ et située dans le plus grand de ces deux angles. Cette demi-droite et les deux demi-droites analogues se coupent en un même point.

(A. Rogoff.)

2049. On joint un point O aux points I, H, K où une sécante X coupe les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, et dans le faisceau O on inscrit un triangle quelconque $A_1B_1C_1$ dont les côtés B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 rencontrent la sécante en I_1, H_1, K_1.

I. Les droites AI_1, BH_1, CK_1 sont concourantes en un point O_1.

II. Si les droites AO, BO, CO coupent les côtés correspondants de $A_1B_1C_1$ en P_1, Q_1, R_1, et si les droites A_1O_1, B_1O_1, C_1O_1 coupent les côtés de ABC en P_1, Q_1, R_1, les six points P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 sont situés sur une droite X_1.

III. Les droites X, X_1 et OO_1 sont concourantes.

(P. Sondat.)

2050. Soient E, D et Δ les aires d'une ellipse, de sa première développée et de sa seconde développée.

On a entre ces trois aires la relation

$$2E(\Delta - 4D) = 5D^2.$$

(E.-N. Barisien.)

2051. Les angles d'un quadrilatère gauche ont chacun deux bissectrices, l'une intérieure, l'autre extérieure. Quatre bissectrices issues de sommets différents sont sur un même hyperboloïde si le nombre des bissectrices intérieures est pair. (R. B.)

[Q1a]

THÉORIE DES PARALLÈLES BASÉE SUR LA TRANSLATION RECTILIGNE ;

Par M. Carlo BOURLET.

Les *Instructions* qui accompagnent les programmes officiels (27 juillet 1905) de l'enseignement de la Géométrie, dans le premier cycle de l'Enseignement Secondaire, recommandent aux professeurs de « faire un appel constant à la notion de mouvement » et de « lier le parallélisme à la notion de translation ». Beaucoup d'entre eux se sont émus de ces Instructions, et à bon droit, en se demandant si dorénavant on enseignerait dans nos lycées *deux* Géométries : l'une, au premier cycle, où les parallèles seraient définies par la translation ; l'autre, au second cycle, où l'on conserverait l'ancienne méthode.

La question qui se pose est alors de savoir si l'on ne pourrait pas, en définissant les parallèles par la translation, construire une Géométrie aussi rigoureuse que celle que l'on enseigne actuellement et qui puisse être conservée d'un bout à l'autre de l'Enseignement Secondaire. C'est pour y répondre que j'ai rédigé ce petit travail qui n'est, en somme, que le premier Chapitre d'une nouvelle Géométrie où l'on ferait un appel constant à la notion de *déplacement* et où l'on donnerait à la méthode des *groupes de transformations* une place prépondérante.

C'est M. Charles Méray qui, à ma connaissance du moins, a pour la première fois, dans ses *Nouveaux Éléments de Géométrie*, dont la première édition

remonte à 1874, fait usage de la translation pour définir les parallèles. En lisant l'Ouvrage de M. Méray, j'avais été frappé de la place qu'y tenait le *postulat* qu'il y a introduit, à savoir que *deux translations peuvent être remplacées par une troisième*; mais l'éminent professeur de l'Université de Dijon, ayant surtout en vue *la fusion* des deux Géométries plane et de l'espace, ne s'était pas préoccupé de réduire le nombre de ses postulats et, à côté de celui que je viens d'énoncer, il en admet bien d'autres. Il admet, par exemple, l'existence d'une infinité de glissières dans la translation rectiligne; il admet aussi que, lorsque deux plans se déduisent l'un de l'autre par translation, toute droite qui rencontre l'un rencontre l'autre. Je me suis alors demandé si, en se plaçant, ce que n'avait pas fait M. Méray, au point de vue de la théorie des groupes, on ne pourrait pas bâtir une Géométrie élémentaire dans laquelle le postulat de M. Méray serait l'*unique* postulat fondamental remplaçant celui d'Euclide.

Reprenant ainsi la chose de fond en comble, je suis parvenu à établir la théorie qui suit, qui diffère totalement de celle de M. Méray quant à l'esprit et s'en écarte notablement quant à l'ordre et à la nature des propositions. Il est clair que, dans un Traité complet de Géométrie, que je pense pouvoir faire paraître bientôt, on étudierait les angles et les rotations, l'homothétie et la similitude dans le même esprit.

Je suis actuellement convaincu que l'introduction d'une telle Géométrie dans notre Enseignement Secondaire constituerait un réel progrès.

Cette nouvelle méthode, substituant aux démonstrations artificielles actuelles d'autres plus naturelles, est plus intuitive, car elle *fait voir* à l'étudiant les déplacements qui permettent de comparer les figures.

Définissant les figures géométriques par les constructions mêmes par lesquelles on les obtient, elle donne lieu à des applications graphiques immédiates. Dès qu'on y a défini le parallélisme de deux droites, on sait tracer deux droites parallèles. On n'est pas obligé d'exposer, comme cela a lieu maintenant, deux Livres entiers de Géométrie, avant de pouvoir justifier la moindre construction élémentaire.

Enfin, et ce n'est pas là l'un de ses moindres avantages, cette nouvelle Géométrie se prête admirablement aux simplifications nécessaires pour les débutants, *et cela sans en modifier ni l'esprit ni l'ordonnance.*

J'ai pu, en effet, en conservant l'ordre exact des propositions de ce petit Mémoire, rédiger un Volume tout à fait élémentaire à l'usage du premier cycle (1), en me contentant de le dépouiller de sa forme abstraite et de substituer, aux démonstrations trop délicates, des vérifications expérimentales au moyen des instruments ordinaires du dessin. La comparaison des premiers Chapitres de ce Volume avec le présent travail montrera les ressources de cette nouvelle Géométrie.

Elle descend plus bas et monte plus haut que celle qui a cours. Présentée sous une forme expérimentale aux enfants, elle leur est plus accessible et est plus attrayante. Présentée avec tous ses détails, sous une forme abstraite, dans les classes élevées, elle initiera nos jeunes élèves aux méthodes fécondes de Sophus Lie qui ont droit de cité dans notre enseignement.

J'ai volontairement donné à l'exposé qui suit une forme abstraite, en employant la notation symbolique habituelle des groupes de transformation. On peut évidemment se passer de cette notation, mais les démons-

(1) *Cours abrégé de Géométrie*, chez Hachette et Cie; 1906.

trations seraient moins rapides et peut-être moins claires. D'autre part, pour montrer la rigueur et la généralité du raisonnement, je n'ai fait intentionnellement aucune figure. Le lecteur pourra aisément en construire, s'il le juge utile. J'ai également réduit cet exposé au strict minimum, en élaguant les applications nombreuses dont il faudrait l'illustrer dans un cours de lycée. Il ne suppose d'ailleurs que la notion préalable du point, de la droite, du plan et de leur détermination ; en d'autres termes, les préliminaires ordinaires qui servent d'introduction à toute Géométrie élémentaire.

Pour plus de rapidité, j'ai rédigé à la fois la théorie dans le plan et dans l'espace. Rien n'est plus facile que de séparer la Géométrie plane de celle de l'espace si on le désire ; mais on détruit ainsi la parfaite harmonie des parties II, III et IV, où l'on remarquera certainement l'exacte correspondance de l'ordre des propositions dans les trois parties.

I. — TRANSLATIONS RECTILIGNES.

1. Le *déplacement* d'une figure invariable peut être envisagé de deux manières différentes : soit simplement au point de vue du résultat produit, soit dans son ensemble. Dans le premier cas on n'envisage que les deux positions initiale et finale de la figure mobile, sans se préoccuper des positions intermédiaires ; dans le second cas on envisage, en outre, l'ensemble des positions intermédiaires de la figure, c'est-à-dire les trajectoires de ses divers points.

En nous plaçant successivement à ces deux points de vue, nous dirons que :

1° *Deux déplacements sont* ÉQUIVALENTS *s'ils transportent une même figure mobile, partant de la même position initiale, à la même position finale.*

2° *Deux déplacements sont* ÉGAUX *s'ils sont équivalents et si en outre les trajectoires décrites par un point mobile quelconque, dans les deux déplacements, sont identiques.*

2. DÉFINITION. — *Soient* P *un plan fixe dit* plan de glissement *et* D *une droite fixe de ce plan que nous appellerons* glissière fixe. *Considérons, d'autre part, un plan p et une droite d de ce plan, dite* glissière mobile. *Si nous plaçons le plan p sur le plan* P *de façon que la droite d coïncide avec la droite* D, *nous pourrons faire glisser le plan p sur le plan* P *de sorte que d glisse sur* D. *Nous réaliserons ainsi un* MOUVEMENT DE TRANSLATION RECTILIGNE *de plan de glissement* P *et de glissière* D.

Tout point *m* de l'espace supposé lié invariablement au plan mobile *p* sera entraîné avec ce plan et subira ainsi un déplacement, et il en sera de même, d'une manière plus générale, de toute figure invariable *f* (plane ou non) liée invariablement au plan *p*.

Soient alors M_1 et F_1 les positions initiales d'un point *m* et d'une figure *f*; et soient M_2 et F_2 leurs positions finales lorsqu'on leur a fait subir une certaine translation rectiligne T. Nous dirons que M_2 *se déduit de* M_1 et que la figure F_2 *se déduit de* F_1 *par la translation rectiligne* T. Les points M_2 et M_1, ainsi que les figures F_2 et F_1, seront dits *homologues* dans la translation rectiligne T.

Dans la suite, comme il s'agira toujours de translations *rectilignes*, nous nous contenterons, pour abré-

ger le langage, de dire simplement *une translation*, en sous-entendant l'épithète *rectiligne*.

3. Translations égales. — D'après ce qui précède, deux translations T et T' seront dites *égales*, et l'on écrira

$$T = T',$$

si, non seulement les positions finales, mais encore les trajectoires décrites par tout point mobile, partant de la même position initiale, sont identiques dans les deux translations.

4. Translations inverses. — Soit T une translation qui amène une figure mobile f de F_1 en F_2. La translation de même glissière et de même plan de glissement, qui ramène f de F_2 en F_1 en faisant décrire à tous les points de la figure mobile f les mêmes chemins que la translation T, mais en sens inverse, est ce que nous appellerons la *translation inverse* de la translation T et nous la désignerons par la notation T^{-1}.

5. Translation identique. — Un mouvement de translation rectiligne est manifestement un mouvement à *un paramètre*, car la position du plan mobile p, et par suite de tout point lié invariablement à ce plan, dépend d'un seul paramètre, par exemple l'abscisse d'un point de la glissière mobile d sur la glissière fixe D. Dès que la valeur de ce paramètre est donnée les positions de tous les points mobiles sont bien déterminées ; ce qui revient à dire que, si l'on fixe la position d'*un seul* point lié invariablement au plan p, celles de tous les autres points entraînés avec p sont bien déterminées.

En d'autres termes, si dans une translation rectiligne

un seul point reste fixe, a un déplacement nul, tous les autres points mobiles restent fixes, c'est-à-dire ont des déplacements nuls.

Une translation de ce genre qui ne déplace aucun point est ce qu'on appelle une TRANSLATION IDENTIQUE.

Il n'y a évidemment qu'*une* translation identique, car deux translations identiques sont *égales*, conformément à la définition du n° 3.

Ce qui précède prouve que :

Pour qu'une translation soit identique il faut et il suffit qu'elle laisse UN *point fixe, c'est-à-dire que la trajectoire d'*UN SEUL *point soit nulle.*

On représente la translation identique par le symbole **1**.

Il est clair que la translation identique est égale à son inverse.

6. PRODUIT DE DEUX TRANSLATIONS. — Supposons qu'une première translation T fasse passer une figure mobile f de la position F_1 à la position F_2 ; puis qu'une seconde translation T' transporte f de F_2 en F_3. La figure invariable f aura subi un *déplacement total* de F_1 en F_3 qu'on appelle le *produit* des deux translations T et T'.

7. POSTULAT. — *Il existe une translation rectiligne et une seule équivalente au produit de deux translations rectilignes et indépendante de l'ordre des facteurs.*

En d'autres termes, *nous admettrons* que, si une translation T amène une figure f de F_1 en F_2 et si une

seconde translation T′ transporte f de F_2 en F_3, il existe une translation rectiligne et *une seule* qui transporte f de F_1 en F_3.

Nous désignerons *cette translation rectiligne* par le symbole TT′.

De plus, si l'on effectue d'abord la translation T′, elle transportera f de F_1 en une certaine position F'_2, puis la translation T ramènera précisément f de F'_2 en F_3.

Les deux translations rectilignes TT′ et T′T sont *égales* (au sens précis du n° 3), ce qui s'écrira

$$TT' = T'T.$$

Voici le postulat qui, dans cette nouvelle Géométrie, remplace l'ancien postulat d'Euclide. Ceci revient donc à dire que l'on admet que les translations rectilignes forment *un groupe* et, puisque ce postulat est le seul dont nous aurons besoin dans la suite, on en doit conclure qu'il caractérise la Géométrie euclidienne lorsqu'on se place au point de vue de Sophus Lie (¹).

8. Produit de plusieurs translations. — La définition du produit de deux translations, grâce au postulat qui précède, s'étend immédiatement, de proche en proche, à un nombre quelconque de facteurs. Les produits de translations ainsi définis jouissent des mêmes propriétés commutatives et associatives que les produits de nombres.

En particulier, le produit de m fois la même translation T sera nommé la *puissance* $m^{ième}$ de T et sera représenté par le symbole T^m.

(¹) Mon collègue et ami M. Tresse m'a communiqué que les travaux de Lie ont établi que le groupe des mouvements euclidiens est le seul qui contienne un sous-groupe *distingué* et que ce sous-groupe est celui des translations.

Les deux propositions suivantes sont d'ailleurs évidentes :

Le produit d'une translation par la translation identique est égal à cette première translation.

Car la translation $T1$ est celle obtenue en effectuant d'abord la translation T, puis la translation **1** ; or, cette dernière ne change la position d'aucun point, donc

$$T1 = 1T = T.$$

Le produit de deux translations inverses est égal à la translation identique.

Car si, sur une figure f, on effectue successivement les deux translations T et T^{-1}, d'après la définition même de T^{-1}, on la ramène à sa position initiale. On a donc

$$TT^{-1} = 1.$$

Ceci montre que -1, dans T^{-1}, se comporte comme un véritable exposant négatif.

9. Théorème. — *Il n'y a qu'une seule translation qui amène un point donné A en un autre point donné A'.*

Soient en effet T et T' deux translations qui amènent A en A'.

La translation $T'T^{-1}$ laisse A fixe, car T' amène A en A' et T^{-1} ramène A' en A. On en conclut que

$$T'T^{-1} = 1.$$

car (n° 5) la seule translation qui laisse un point fixe est la translation identique. On en déduit, en multipliant par T,

$$T'T^{-1}T = 1T$$

ou, comme l'on a

$$T^{-1}T = 1,$$

et que l'on peut remplacer $T^{-1}T$ par le produit effectué,

$$T' = T.$$

10. Théorème. — *Dans toute translation rectiligne :*

1° *La trajectoire d'un point mobile est un segment de droite et cette droite est une glissière ;*

2° *Tout plan passant par une glissière est un plan de glissement.*

Soient M et M' les positions initiale et finale d'un point mobile *m* dans une translation rectiligne T, et P un plan quelconque passant par la droite MM'.

La translation T' de glissière MM' et de plan de glissement P qui amène M en M' est, d'après le théorème précédent, *égale* à T.

Or, dans cette translation T', le point *m* a pour trajectoire MM', la droite MM' est une glissière et P un plan de glissement, il en est donc de même pour T.

Inversement, *toute glissière est évidemment la trajectoire commune de tous les points mobiles situés sur elle.*

On en conclut qu'*il n'y a pas d'autres glissières que les trajectoires des points mobiles, et que, par suite, par tout point de l'espace il passe une glissière, et une seule, qui est la trajectoire de ce point.*

On peut prendre, comme glissière d'une translation, toute droite joignant deux points homologues dans la

translation, et pour plan de glissement tout plan passant par deux tels points.

Il en résulte qu'une translation est parfaitement définie dès qu'on se donne un couple de points homologues A *et* A′.

Car elle aura pour plan de glissement un plan quelconque P passant par AA′ et pour glissière la droite AA′. C'est donc la translation obtenue en faisant glisser un plan mobile p sur P, de façon qu'une droite d de p glisse sur AA′, et qu'un point a de p décrive le segment AA′, ce qui *détermine* le déplacement de p.

II. — DROITES PARALLÈLES.

11. Définition. — *Deux droites de l'espace sont dites* parallèles *lorsque l'une se déduit de l'autre par une translation rectiligne.*

12. Théorème. — *Deux droites parallèles* D *et* D′ *qui ont un point commun* A *coïncident.*

Soient en effet T la translation par laquelle D′ se déduit de D, et A′ l'homologue de A dans cette translation.

1° Si A′ coïncide avec A, la translation T est égale à **1** ; tout point coïncide avec son homologue, donc D′ coïncide avec D.

2° Si A′ et A sont distincts, A′ est situé sur D′ homologue de D. Or, par hypothèse, A est aussi situé sur D′. La droite D′ coïncide donc avec la glissière AA′ : c'est une glissière de T et elle coïncide avec son homologue D.

13. Théorème. — *Deux droites parallèles distinctes* D *et* D′ *sont situées dans un même plan et ne se rencontrent pas.*

D'abord il est évident que les deux droites n'ont aucun point commun, car, sans cela, d'après ce qui précède, elles ne seraient pas distinctes.

Soient alors A un point de D et A′ son homologue sur D′ dans la translation T qui amène D en D′. Désignons par P le plan déterminé par le point A′ et D.

La droite AA′ étant une glissière, le plan P qui la contient est un plan de glissement; par suite, dans la translation T, la droite D reste située dans le plan P, qui contient donc D′.

14. Théorème. — *Deux droites* D *et* D′ *parallèles à une troisième* D″ *sont parallèles entre elles.*

Soit T la translation qui amène D en D″ et T′ la la translation qui amène D″ en D′; la translation TT′ amène D en D′.

15. Théorème. — *Par tout point* O *de l'espace on peut mener une parallèle à une droite donnée* D, *et l'on ne peut en mener qu'une.*

En effet, soit A un point de D. La translation de glissière AO, qui amène A en O, amène D en la parallèle D′ passant par O.

Cette parallèle est d'ailleurs la seule, car toute parallèle à D passant par O est aussi parallèle à D′ et, par suite, coïncide avec D′ puisqu'elle la rencontre en O.

16. Théorème. — *Dans une translation rectiligne toutes les glissières sont parallèles entre elles.*

Soient D et D_1 deux glissières d'une translation T, A et A' deux points de D homologues dans cette translation, et B un point de D_1. Désignons par T' la translation de glissière A'B, qui amène A' en B et amène D en une position D', parallèle à D passant par B.

La translation TT' amène A en B, car T amène A en A' et T' transporte A' en B; TT' transporte donc aussi D en D'.

Nous allons prouver que D' coïncide avec D_1.

Exécutons, en effet, les translations précédentes en ordre inverse. La translation T' amène A en un point C de D'; puis la translation T amène C en B, car comme, d'après le postulat,

$$TT' = T'T,$$

la translation T'T doit amener A au même point B que TT'. Or, C et B sont tous deux sur D' et, comme ce sont deux points homologues dans la translation T, on en conclut que CB, c'est-à-dire D', est une glissière de T. D' coïncide donc avec D_1 puisque (n° 10) par un point B il ne passe qu'une glissière.

17. Réciproque. — *Lorsque plusieurs droites sont parallèles, dans toute translation pour laquelle l'une d'elles est glissière, les autres le sont aussi.*

Soient D et D' deux droites parallèles et T une translation de glissière D. La glissière D_1 de T qui passe par un point O de D' est parallèle à D, donc elle coïncide avec D'.

18. Segments égaux et parallèles. — Considérons deux droites parallèles indéfinies D et D' et, sur ces deux droites, deux segments égaux AB et A'B'.

Par une translation amenons A en A' : les deux

droites D et D' coïncideront. Si B vient se placer sur D du même côté de A' que B', les deux segments égaux AB et A'B' coïncident : nous dirons alors qu'ils sont *de même sens*. Sinon, nous dirons que les deux segments sont *de sens contraires*. En d'autres termes :

Deux segments égaux sont parallèles et de même sens si l'on peut les faire coïncider par la translation qui amène leurs origines en coïncidence.

Deux segments égaux sont parallèles et de sens contraires si la translation qui fait coïncider leurs origines les place en prolongement l'un de l'autre.

19. Théorème. — *Dans une translation rectiligne tous les points mobiles décrivent des segments égaux, parallèles et de même sens.*

Soient a et m deux points mobiles dans une translation T, A et M leurs positions initiales, A' et M' leurs positions finales. Les trajectoires de ces deux points sont AA' et MM'.

Les droites AA' et MM' sont parallèles comme étant des glissières.

Les droites AM et A'M' sont également parallèles comme homologues dans la translation T.

Si donc on prend AM pour glissière, A'M' le sera aussi, et la translation T', qui transporte A en M, transportera A' en un certain point de A'M'. D'autre part, cette translation amène la droite indéfinie AA' en coïncidence avec la droite indéfinie parallèle MM' ; par suite, elle amène aussi A' sur MM'. La translation T', amenant à la fois A' sur A'M' et sur MM', transporte A' en M' ; elle fait donc coïncider les deux segments AA' et MM' qui, par suite, sont égaux, parallèles et de même sens.

20. Remarque. — Si l'on nomme *parallélogramme* un quadrilatère dans lequel les côtés opposés sont deux à deux parallèles, la démonstration précédente prouve que :

Dans un parallélogramme les côtés opposés sont égaux.

Car elle prouve que, dans le quadrilatère $AA'M'M$ qui, par hypothèse, est un parallélogramme, on a

$$AA' = MM'.$$

21. Théorème. — *Étant données quatre droites parallèles* D_1, D_2, D_3, D_4 *situées dans un même plan et coupées par deux sécantes* Δ *et* Δ' *respectivement aux points* A_1, A_2, A_3, A_4 *et* B_1, B_2, B_3, B_4, *si l'on a*

$$A_1A_2 = A_3A_4,$$

on a aussi

$$B_1B_2 = B_3B_4.$$

Supposons que les segments A_1A_2 et A_3A_4 soient de même sens. Effectuons alors sur l'ensemble des deux droites D_1 et D_2, considérées comme formant une figure invariable, une translation de glissière Δ qui amène A_1 en A_3 ; le point A_2 viendra en A_4, et D_1 et D_2 viendront respectivement coïncider avec D_3 et D_4. Les points B_1 et B_2 viendront se placer en B'_1 et B'_2 sur D_3 et D_4, de telle sorte que le segment $B'_1B'_2$ soit parallèle à Δ' et égal à B_1B_2. La figure $B'_1B'_2B_4B_3$ est alors un parallélogramme, et l'on a

$$B_1B_2 = B'_1B'_2 = B_3B_4.$$

De plus, les deux segments B_1B_2 et B_3B_4 sont de même sens.

22. Corollaire. — *Si dans la figure précédente on a*

$$A_3A_4 = n.A_1A_2,$$

n étant un nombre entier quelconque, on a aussi

$$B_3B_4 = n.B_1B_2.$$

23. Théorème. — *Lorsque deux droites* D *et* D′ *sont parallèles, toute droite* Δ *de leur plan qui rencontre l'une rencontre l'autre.*

Remarquons d'abord que, D et D′ ne se rencontrant pas, tous les points de l'une sont situés d'un même côté de l'autre.

Supposons alors que Δ coupe D en A. Le théorème sera évidemment démontré si l'on peut prouver qu'il existe un point de Δ situé sur D′ ou de l'autre côté de D′ que D.

A cet effet, prenons un point B sur D et un point B′ sur D′, et traçons le segment de droite BB′. Faisons effectuer à D une translation de glissière Δ du côté de D′. Le point A viendra occuper une position A_1 sur Δ, du même côté de D que D′, et D viendra en une position D_1, parallèle à D, et passant par A_1.

Si A_1 est situé sur D′ ou de l'autre côté de D′ que D, la proposition est établie.

Sinon, le point A_1 étant situé entre D et D′, il en sera de même de tous les points de D_1 ; et les deux points B et B′, étant de part et d'autre de D_1, la droite D_1 rencontrera BB′ en un point B_1 situé entre B et B′.

Choisissons alors un nombre entier n, tel que $n.BB_1$ soit égal ou supérieur à BB′, et effectuons sur la droite D la translation T^n.

Le point A viendra en un point A_n de Δ, du même

côté de D que D′ et tel que

$$AA_n = n.AA_1.$$

Ce point A_n sera situé sur D′ ou de l'autre côté de D′ que D; car, s'il n'en était pas ainsi, la parallèle D_n à D passant par A_n serait comprise entre D et D′. Elle couperait BB′ en un point B_n compris entre B et B′ et, par suite, tel que

$$BB_n < BB'.$$

Or ceci est impossible, car, puisque

$$AA_n = n.AA_1,$$

on a aussi

$$BB_n = n.BB_1 \geq BB'.$$

24. Théorème. — *Deux droites* D *et* D′ *situées dans un même plan et ne se rencontrant pas sont parallèles.*

Menons en effet par un point O de D′ une parallèle Δ à D. Elle coïncidera avec D′, car, s'il n'en était pas ainsi, D′, rencontrant Δ, rencontrerait D parallèle à Δ.

III. — PLANS PARALLÈLES.

25. Définition. — *Deux plans sont dits* parallèles *lorsque l'un se déduit de l'autre par une translation rectiligne.*

26. Théorème. — *Deux plans parallèles* P *et* P′ *qui ont un point commun* A *coïncident.*

Soient en effet T la translation par laquelle P′ se déduit de P et A′ l'homologue de A dans cette translation :

1° Si A' coïncide avec A, la translation T est égale à 1 et les deux plans coïncident.

2° Si A' et A sont distincts, la droite AA' est une glissière située tout entière dans le plan P' qui contient à la fois A et A'. Le plan P' est donc un plan de glissement et coïncide avec son homologue P.

27. Théorème. — *Deux plans parallèles distincts n'ont aucun point commun.*

Car, s'ils en avaient un, ils coïncideraient.

28. Théorème. — *Deux plans* P *et* P' *parallèles à un troisième* P'' *sont parallèles entre eux.*

Car, si T est la translation qui transporte P en P'' et T' celle qui transporte P'' en P', la translation TT' transporte P en P'.

29. Théorème. — *Par tout point* O *de l'espace on peut mener un plan parallèle à un plan donné* P *et un seul.*

On obtient évidemment un tel plan P' par une translation qui amène un point de P en O. C'est d'ailleurs le seul, car tout autre plan parallèle à P et passant par O est aussi parallèle à P' et par suite coïncide avec lui puisqu'il le rencontre en O.

30. Théorème. — *Les droites d'intersection* D *et* D' *de deux plans parallèles* P *et* P', *par un troisième* Π *qui les rencontre, sont parallèles.*

Soient O un point de D et O' un point de D'. Si l'on fait effectuer à P la translation de glissière OO' qui amène O en O', le plan Π, contenant OO', sera un plan

de glissement, la droite D restera donc dans H et, comme P viendra coïncider avec P′, la droite D viendra bien par cette translation coïncider avec l'intersection D′ de H et P′.

31. Théorème. — *Étant donnés quatre plans parallèles* P_1, P_2, P_3, P_4 *rencontrés par deux droites* Δ *et* Δ' *respectivement aux points* A_1, A_2, A_3, A_4 *et* B_1, B_2, B_3, B_4, *si l'on a*

$$A_1A_2 = A_3A_4,$$

on a aussi

$$B_1B_2 = B_3B_4.$$

Supposons les segments A_1A_2 et A_3A_4 de même sens. Effectuons sur l'ensemble des deux plans P_1 et P_2, considérés comme formant une figure invariable, la translation de glissière Δ qui amène A_1 en A_3 : le point A_2 viendra en A_4, et P_1 et P_2 viendront respectivement coïncider avec P_3 et P_4. Les points B_1 et B_2 viendront se placer en B'_1 et B'_2 sur les plans P_3 et P_4, de telle sorte que le segment $B'_1B'_2$ soit parallèle à Δ' et égal à B_1B_2.

Les droites B'_1B_3 et B'_2B_4 seront parallèles comme intersections des plans P_3 et P_4 par le plan des deux parallèles $B'_1B'_2$ et Δ'.

La figure $B'_1B'_2B_4B_3$ est donc un parallélogramme et l'on a

$$B_1B_2 = B'_1B'_2 = B_3B_4.$$

Corollaire. — *Si l'on a*

$$A_3A_4 = n.A_1A_2,$$

n étant un nombre entier quelconque, on a aussi

$$B_3B_4 = n.B_1B_2.$$

32. Théorème. — *Lorsque deux plans* P *et* P′ *sont parallèles, toute droite* Δ *qui rencontre l'un rencontre l'autre.*

La démonstration est identique à celle du nº 23.

On pourrait d'ailleurs, par un renversement de l'ordre des propositions, placer celle-ci la première et alors en déduire le théorème du nº 23.

33. Théorème. — *Lorsque deux plans* P *et* P′ *sont parallèles, tout plan* Π *qui rencontre l'un rencontre l'autre.*

Supposons que Π coupe le plan P suivant une droite D. Si par un point O de D on mène, dans le plan Π, une droite Δ distincte de D, cette droite rencontrant le plan P en O rencontrera le plan parallèle P′ en un point O′ appartenant à la fois à P′ et à Π.

34. Théorème. — *Deux plans* P *et* P′ *qui n'ont aucun point commun sont parallèles.*

Menons en effet par un point O de P′ un plan Π parallèle à P. Ce plan Π coïncide avec P′, car, s'il n'en était pas ainsi, P′, rencontrant Π, rencontrerait le plan P parallèle à Π.

IV. — DROITES ET PLANS PARALLÈLES.

35. Définition. — *Une droite* D *et un plan* P *sont dits* parallèles *s'il existe une translation qui amène* D *à être contenue dans le plan* P *ou, ce qui revient au même, s'il existe une translation qui amène* P *à contenir* D.

36. Théorème. — *Si une droite* D *parallèle à un plan* P *a un point* A *commun avec ce plan, elle est située tout entière dans le plan* P.

Soit T la translation qui amène P à occuper une position P′ passant par D et soit A′ l'homologue de A dans cette translation. Il suffit de prouver que P′ coïncide avec P.

1° Si A′ coïncide avec A, c'est évident, puisque $T = 1$.

2° Si A′ ne coïncide pas avec A, la droite AA′ est tout entière dans le plan P′, car A est situé sur D contenue dans P′ et A′ est l'homologue d'un point de P. AA′ étant une glissière, le plan P′ est un plan de glissement et coïncide avec son homologue P.

37. Théorème. — *Une droite* D *parallèle à un plan* P *et non située dans ce plan n'a aucun point commun avec ce plan.*

Car, si elle en avait un, elle serait tout entière dans le plan.

38. Théorème. — *Lorsque deux droites* D *et* D′ *sont parallèles, tout plan* P *parallèle à l'une* D *est parallèle à l'autre* D′.

Car, si T est la translation qui amène D′ à coïncider avec D et T′ celle qui amène D à être contenue dans P, la translation TT′ amène la droite D′ à être située dans le plan P.

Cas particulier. — *Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan passant par l'une est parallèle à l'autre,* ou, ce qui revient au même : *Lorsqu'une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan.*

39. Corollaire. — *Si par un point* O *d'un plan* P *on mène une droite* D' *parallèle à une autre droite* D *parallèle au plan* P, *la droite* D' *est tout entière située dans le plan* P.

Car D' est également parallèle au plan P et a un point O commun avec lui.

40. Théorème. — *Lorsque deux plans* P *et* P' *se coupent, toute droite* D *parallèle à la fois aux deux plans est parallèle à leur intersection ; et réciproquement, toute droite* D *parallèle à l'intersection est à la fois parallèle aux deux plans.*

Si D est parallèle à P et à P' et que par un point O de leur intersection on mène une parallèle Δ à D, cette droite Δ est située à la fois dans les deux plans (n° 39); donc elle coïncide avec leur intersection.

La réciproque résulte immédiatement du cas particulier du n° 38.

41. Théorème. — *Si une droite* D *est parallèle à un plan* P, *tout plan* H, *passant par* D, *qui coupe* P, *le coupe suivant une droite* D' *parallèle à* D.

Car D est à la fois parallèle à P et à H ; donc elle est parallèle à leur intersection D'.

42. Théorème. — *Lorsque deux plans* P *et* P' *sont parallèles, toute droite* D *parallèle à* P *est parallèle à* P'.

Car, si T est la translation qui amène P' à coïncider avec P et T' celle qui amène P à passer par D, la translation TT' amène P' à passer par D.

Cas particulier. — *Lorsque deux plans sont pa-*

rallèles, toute droite contenue dans l'un est parallèle à l'autre.

43. Théorème. — *Par tout point* O *de l'espace on peut mener une infinité de droites parallèles à un plan donné* P. *Le lieu géométrique de ces droites est le plan* P′ *parallèle à* P *passant par* O.

Car toute droite passant par O et située dans P′ est, d'après ce qui précède, parallèle à P; et, réciproquement, toute droite parallèle à P passant par O est également parallèle à P′ et, par suite, est située dans P′ puisqu'elle y a un point O.

44. Théorème. — *Toute droite* D *qui ne rencontre pas un plan* P *est parallèle à ce plan.*

Soit en effet P′ un plan parallèle à P et passant par un point O de D. La droite D est située dans le plan P′, car, s'il n'en était pas ainsi, la droite D, rencontrant P′ en O, rencontrerait le plan parallèle P.

[D3bα]

SUR LA SÉRIE DE TAYLOR ET SES POINTS SINGULIERS;

Par M. Eugène FABRY.

On sait qu'une série de Taylor représente une fonction analytique qui a, au moins, un point singulier sur la circonférence de convergence. Ce théorème, qui résulte des propriétés des fonctions analytiques, peut se déduire directement de l'ordre de grandeur des coefficients par rapport au rayon de convergence, et

des relations bien connues sur l'ordre de grandeur du module maximum.

Soit la série

$$(1)\qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

dont le rayon de convergence est supposé ramené à 1. La plus grande limite de $\sqrt[n]{|a_n|}$ est alors égale à 1; c'est-à-dire que, quel que soit ε, on a

$$\sqrt[n]{|a_n|} < 1 + \varepsilon,$$

à partir d'un rang déterminé et

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1 - \varepsilon,$$

pour une infinité de valeurs de n.

Soit

$$z = re^{\omega i},$$

où

$$r < 1, \qquad \omega = \frac{2k\pi}{\mu},$$

k prenant les μ valeurs entières de 0 à $\mu - 1$. Formons la somme

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-km\frac{2\pi i}{\mu}} f\left(re^{k\frac{2\pi i}{\mu}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{k(n-m)\frac{2\pi i}{\mu}},$$

où $\mu > m$. Le coefficient de $a_n r^n$ est une progression géométrique dont la somme est nulle lorsque $\frac{n-m}{\mu}$ n'est pas entier; elle est égale à μ lorsque $n - m$ est un multiple de μ. On a donc

$$\frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-km\frac{2\pi i}{\mu}} f\left(re^{k\frac{2\pi i}{\mu}}\right) = a_m r^m + a_{m+\mu} r^{m+\mu} + a_{m+2\mu} r^{m+2\mu} + \ldots;$$

r étant fixe, soit M le maximum du module de $f(re^{\omega i})$ lorsque ω varie de 0 à 2π. On a

$$\mathrm{M} > \left| \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\mu-1} e^{-km\frac{2\pi i}{\mu}} f\left(re^{k\frac{2\pi i}{\mu}}\right) \right|$$
$$> |a_m r^m| - |a_{m+\mu} r^{m+\mu} + a_{m+2\mu} r^{m+2\mu} + \ldots|;$$

μ peut être choisi assez grand, pour que le dernier terme soit aussi petit que l'on voudra, puisque la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Donc

$$\mathrm{M} \geqq |a_m r^m|.$$

Sur une circonférence de rayon r, inférieur à 1, il y a un point tel que $|f(re^{\omega i})|$ soit au moins égal au module d'un terme quelconque $a_n r^n$.

Dans le cas où la série $\sum |a_n|$ est convergente, on peut, dans cet énoncé, supposer $r = 1$.

Si les coefficients a_n ne restent pas finis, la plus grande limite de $|a_n|$ étant infinie, soit A un nombre quelconque, aussi grand que l'on voudra. Il existe des termes tels que $|a_n| > 2\mathrm{A}$. n étant ainsi fixé, prenons r compris entre $\frac{1}{2^n}$ et 1, alors

$$|a_n r^n| > \mathrm{A}$$

et, sur la circonférence de rayon r, il y a un point tel que

$$|f(re^{\omega i})| \geqq |a_n r^n| > \mathrm{A}.$$

Il y a donc, dans la circonférence de convergence, des valeurs de z telles que $|f(z)|$ dépasse tout nombre donné. Et il y a au moins un point singulier sur la circonférence.

Si les coefficients a_n restent finis, mais ne tendent

pas tous vers zéro, na_n ne reste pas fini. Il en résulte que la dérivée $f'(z)$ ne reste pas finie sur la circonférence de convergence.

Enfin, si $n^p a_n$ ne reste pas fini, p étant un entier positif,

$$(2)\qquad f_p(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)a_n z^{n-p}$$

ne reste pas fini sur la circonférence de rayon 1 ; cette fonction a, au moins, un point singulier sur la circonférence, et aussi $f(z)$.

Si $\dfrac{\mathrm{L}\left|\dfrac{1}{a_n}\right|}{\mathrm{L}\,n}$ n'augmente pas indéfiniment avec toute suite de valeurs de n, c'est-à-dire s'il existe une suite infinie de valeurs de n telles que $\dfrac{\mathrm{L}\left|\dfrac{1}{a_n}\right|}{\mathrm{L}\,n}$ reste fini, il existera un nombre p tel que, pour ces valeurs de n,

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < n^p$$

et $f_{p+1}(z)$ ne restera pas fini sur la circonférence de rayon 1.

Supposons donc que $\dfrac{\mathrm{L}\left|\dfrac{1}{a_n}\right|}{\mathrm{L}\,n}$ augmente indéfiniment avec n, pour toute suite infinie de valeurs de n. Quel que soit p, $|a_n|n^{p+2}$ tend vers zéro, et la série (2) est absolument convergente sur la circonférence de rayon 1. Il en résulte que le maximum du module de $f_p(e^{\omega i})$ est au moins égal à

$$n(n-1)\ldots(n-p+1)|a_n|,$$

quel que soit n.

Si la fonction $f(z)$ n'avait aucun point singulier sur

la circonférence de rayon 1, le développement

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + \ldots + \frac{h^p}{p!} f_p(z) + \ldots,$$

où $|z| = 1$, aurait un rayon de convergence supérieur à zéro, et $\sqrt[p]{\left|\frac{f_p(z)}{p!}\right|}$ aurait une plus grande limite finie. Il existerait alors un nombre fini A tel que, quel que soit p, on ait

$$|f_p(z)| < A^p \times p!,$$

tant que $|z| = 1$; le module maximum de $f_p(e^{\omega i})$ serait alors inférieur à $A^p \times p!$ et l'on aurait

$$|a_n| n(n-1)\ldots(n-p+1) < M < A^p \times p!$$

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{1}{A^p} \times \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!};$$

en donnant à p les valeurs 1, 2, ..., n,

$$n\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{n}{1}\frac{1}{A} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{A^2} + \ldots + \frac{1}{A^n} = \left(1+\frac{1}{A}\right)^n - 1.$$

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{a_n}\right|} > \left(1-\frac{1}{A}\right)\sqrt[n]{\frac{1-\left(1+\frac{1}{A}\right)^{-n}}{n}},$$

expression qui tend vers $1+\frac{1}{A}$ lorsque n devient infini.

La plus grande limite de $\sqrt[n]{|a_n|}$ serait au plus égale à $\frac{A}{1+A}$ et le rayon de convergence de la série 1 serait

$$\frac{1+A}{A} > 1.$$

S'il n'y avait aucun point singulier sur la circonférence de rayon 1, le rayon de convergence serait supérieur à 1. Donc, dans tous les cas, il y a au moins un point singulier sur la circonference de convergence.

[K2e]

SUR LE CERCLE PÉDAL;

PAR M. G. FONTENÉ.

Bobillier a donné en 1829, dans les *Annales de Gergonne*, le théorème suivant :

Pour une hyperbole équilatère, le cercle pédal d'un point D *de la courbe, relativement à un triangle inscrit* ABC, *passe au centre de la courbe.*

Ce théorème est obtenu en transformant par polaires réciproques, relativement à un cercle de centre D, le fait que tout triangle circonscrit à une parabole a son cercle circonscrit passant au foyer de la courbe; le point D est pris sur la directrice. On déduit de là la propriété suivante, sur laquelle j'ai fondé une démonstration du théorème de Feuerbach (*Nouvelles Annales*, 1905, p. 260 et 504) :

Étant donné un quadrangle ABCD, *les cercles des neuf points des quatre triangles auxquels il donne lieu ont un point commun* K : *en outre, le cercle pédal de l'un quelconque des quatre points relativement au triangle formé par les trois autres passe au point* K.

Voici une démonstration élémentaire de cette dernière propriété :

Soit un triangle ABC, dont les côtés ont leurs milieux en M, N, P. Le point S étant quelconque, et les milieux des segments SA, SB, SC étant M', N', P', les cercles des neuf points des deux triangles SAB et SAC

ont en commun le point M' et un autre point que nous appellerons K; on a alors

$$\widehat{M'KP} = \widehat{M'N'P} = \widehat{SAB},$$

$$\widehat{M'KN} = 2^d - \widehat{M'P'N} = 2^d - \widehat{SAC},$$

et, par soustraction,

$$(1) \qquad \widehat{PKN} = 2^d - A = 2^d - \widehat{PMN};$$

le point K appartient donc au cercle des neuf points du triangle ABC, et une démonstration analogue s'applique au triangle SBC. Ce premier point étant acquis, soit DEF le triangle pédal du point S; le cercle DEF passera au point K si les angles FKE et FDE sont supplémentaires. Or, le point K étant sur le cercle des neuf points du triangle SAB, dont SF est une hauteur, on a

$$\widehat{PKF} = \widehat{SBA} - \widehat{SAB} = \widehat{SDF} - \widehat{SAB};$$

on a de même

$$\widehat{NKE} = \widehat{SCA} - \widehat{SAC} = \widehat{SDE} - \widehat{SAC};$$

l'addition donne

$$\widehat{PKF} + \widehat{NKE} = \widehat{FDE} - A;$$

on a donc, en tenant compte de (1),

$$\widehat{FKE} = (2^d - A) - (\widehat{FDE} - A) = 2^d - \widehat{FDE}.$$

(J'ai employé les notations de la page 55 du Volume des *Nouvelles Annales* pour 1906.)

[K2c]

SUR LE THÉORÈME DE FEUERBACH;

PAR M. R. BOUVAIST.

L'objet de cette courte Note est de donner, en même temps qu'une démonstration nouvelle du théorème de Feuerbach, la solution de la question proposée 2036 (1906, p. 96).

Le cercle des neuf points ω d'un triangle ABC est le lieu des foyers des paraboles conjuguées au triangle. Ces paraboles sont harmoniquement circonscrites aux coniques inscrites dans le triangle ABC, et sont inscrites dans le triangle A'B'C' ayant pour sommets les milieux des côtés de ABC; leurs directrices passent par le centre O du cercle circonscrit à ABC, qui est l'orthocentre du triangle A'B'C'.

Soient F et F' les points, autres que les points cycliques, communs au cercle ω et au cercle I inscrit dans le triangle ABC; il existe une infinité de triangles inscrits dans le cercle I et circonscrits aux paraboles de foyer F ou F' conjuguées au triangle ABC. Or, ces paraboles sont déjà, par construction, harmoniquement circonscrites au cercle I; l'existence des triangles précédents entraîne alors, d'après une propriété bien connue, que le cercle I soit harmoniquement circonscrit aux paraboles considérées, qui dès lors ont pour directrice commune la droite OI; étant inscrites dans le triangle A'B'C' et ayant même directrice, elles coïncident, et, par suite, le point F est confondu avec le point F'. Le cercle I est, par suite, tangent au cercle ω en F, foyer de la parabole de directrice OI inscrite

dans le triangle A'B'C'; ce point F n'est d'ailleurs que le point de concours des symétriques de la droite OI par rapport aux côtés du triangle A'B'C'; la proposition qui fait l'objet de la question 2036 se trouve ainsi démontrée.

BIBLIOGRAPHIE.

Les nombres positifs, exposé des théories modernes de l'Arithmétique élémentaire, par M. *Stuyvaert*. 1 vol. in-8° de XII-132 pages. Gand, E. Van Goethem. Prix : 3fr.

L'enseignement des mathématiques élémentaires subit en ce moment une crise profonde. Les progrès de la philosophie des mathématiques ont bouleversé les idées traditionnelles sur les fondements de la Science, et l'influence des doctrines nouvelles se fait de plus en plus sentir sur les méthodes d'exposition. C'est ainsi que la notion d'ensemble, à peu près ignorée il y a une trentaine d'années, tend à devenir, didactiquement comme philosophiquement, le fondement même des mathématiques. Il y a de même une tendance à prendre, comme base de la Géométrie, la notion des groupes de mouvements.

Au nombre des livres où se manifeste la préoccupation de mettre les méthodes d'enseignement en harmonie avec les idées modernes sur les principes des mathématiques, il faut signaler tout particulièrement le petit Traité d'Arithmétique élémentaire que vient de publier M. Stuyvaert.

L'auteur nous avertit dans sa préface que l'Ouvrage, destiné aux professeurs ou tout au moins aux meilleurs élèves, est une sorte de manuel ou de précis. On serait donc malvenu à lui reprocher une concision parfois un peu excessive, et le manque presque complet d'applications numériques.

Le Chapitre I traite des nombres entiers. Après les premières définitions, l'auteur passe en revue les opérations fondamentales, et établit *in abstracto* leurs propriétés essen-

tielles ($a + b = b + a$; $a - (b - c) = a - b + c$; $ab = ba$; etc.). Ces propriétés sont ensuite utilisées pour la théorie de la numération décimale et des opérations exécutées dans ce système. Une telle méthode d'exposition ne peut évidemment convenir, l'auteur le déclare d'ailleurs tout le premier, qu'à des élèves exercés à la pratique du calcul numérique, et qui veulent acquérir des raisons précises de ce qu'ils connaissent déjà par routine.

Viennent ensuite des paragraphes sur les différents systèmes de numération, les caractères de divisibilité et les propositions les plus simples de la théorie des nombres (les théorèmes de Fermat et de Wilson sont démontrés).

M. Stuyvaert n'a pas parlé des nombres négatifs, pour se conformer à l'usage qui veut que la théorie en soit reléguée dans l'Algèbre. Il semble le regretter et je le regrette avec lui. L'emploi des nombres négatifs rend l'exposition de plusieurs matières à la fois plus simple et plus large. On ne voit pas pourquoi, dans un enseignement où l'on introduit les nombres fractionnaires et les nombres incommensurables pour rendre possibles dans tous les cas la division et l'extraction des racines, on laisse de côté les nombres qui donnent un sens à toutes les soustractions.

Le Chapitre II est consacré aux fractions. On sait qu'on peut les définir en se plaçant, soit au point de vue de la théorie des grandeurs, soit au point de vue de l'Arithmétique pure, qui ne connaît que le nombre entier. L'expression $\frac{2}{3}$, par exemple, a, dans le premier cas, un sens concret, et, dans le second cas, est un symbole auquel on ne peut donner un sens que par une convention. C'est le second point de vue qu'adopte M. Stuyvaert, conformément d'ailleurs à la tendance aujourd'hui la plus générale.

Les nombres incommensurables sont étudiés au Chapitre III. Ils sont définis par les coupures faites dans l'ensemble des nombres rationnels, mais cette notion n'est pas introduite sans ménagement. C'est seulement après avoir considéré les cas particuliers de la racine carrée et de la racine cubique qu'on aborde la théorie générale des incommensurables. Cette théorie me paraît fort bien exposée, et je ne hasarderai qu'une très légère critique, ne portant d'ailleurs au fond que sur une question de langage. L'auteur dit (comme à peu près tout le monde) :

« ... la coupure *définit* un nombre incommensurable ». Cette phrase est-elle bien claire? Un débutant comprend-il bien ce que c'est que *définir une chose qui n'existe pas*? Je crois qu'il y aurait avantage à dire :

« Faisons dans l'ensemble des nombres rationnels une coupure qui les répartit en deux ensembles A et B. *Pour abréger*, j'appellerai *nombre irrationnel* le système de ces deux ensembles. Ainsi, « le nombre $\sqrt{2}$ n'est qu'*une expression abrégée* pour désigner le système de deux ensembles, dont l'un contient tous les nombres rationnels dont le carré est plus petit que 2, et dont le second contient tous les nombres rationnels dont le carré est plus grand que 2 ».

En s'exprimant ainsi, on fait perdre au nombre incommensurable son caractère de symbole ou d'imaginaire : « nombre incommensurable » est tout simplement un nom que l'on donne à un ensemble d'éléments réels et bien connus. Encore une fois, il y a là surtout une question de langage. Mais personne ne conteste que, dans l'enseignement, les questions de langage aient une importance considérable.

Remarquons à ce propos qu'il suffit, pour définir une incommensurable, de parler de l'ensemble des nombres rationnels qui lui sont inférieurs. On aboutit ainsi à la notion de *segment*, telle que l'expose M. Russell dans *The Principles of Mathematics* [1].

Je crois que la théorie des segments pourrait être substituée sans désavantage didactique à celle de la coupure.

Dans le même Chapitre figurent la théorie des proportions, celle des limites, où l'on continue à trouver les mêmes qualités de netteté et de rigueur que précédemment. Le Chapitre se termine par deux paragraphes substantiels, relatifs aux approximations numériques et aux opérations abrégées.

Le dernier Chapitre traite de la mesure des grandeurs. La notion de rapport de deux grandeurs est très heureusement rattachée à la théorie des ensembles. Viennent enfin des applications à la mesure du temps, des longueurs, des poids, aux problèmes d'alliages, d'intérêt, etc., et aux calculs sur les

---

[1] *Voir* aussi COUTURAT, *Les principes des Mathématiques*; HUNTINGTON, *The Continuum as a type of order* (*Annals of Math.*, 1905). Une traduction en langue esperanto du Mémoire de M. Huntington est actuellement sous presse.

nombres complexes, qui servent à la mesure du temps et pour les monnaies étrangères. Les méthodes adoptées dans cette dernière Partie sont autant que possible algébriques. Il est inutile d'insister sur la concision ainsi obtenue.

L'Ouvrage de M. Stuyvaert ne doit pas être mis entre les mains de ceux qui n'ont pas une maturité d'esprit suffisante; mais son ordre excellent, le soin de sa rédaction, sa rigueur le recommandent aux élèves soucieux d'acquérir des habitudes de précision intellectuelle. R. B.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Construire la courbe lieu des points dont les coordonnées rectangulaires ont pour expressions*

$$x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \qquad y = \frac{(t-2)^2}{t-1}.$$

II. *Étant donnée la parabole* P, $y^2 = 2px$, *former l'équation de la parabole* Q *obtenue en transportant* P *parallèlement à elle-même de manière que son sommet vienne en un point* M(α, β). *Supposons que le point* M *décrive la parabole*

$$y^2 + 2px = 0,$$

les paraboles Q *formeront une famille de courbes : trouver leurs trajectoires orthogonales.*

III. *Un point* M, *de masse* m, *assujetti à se mouvoir sur une circonférence de rayon* a, *est attiré vers un point* O *de la courbe par une force* $m\omega^2 r$, r *désignant la distance* OM. *A l'instant initial, cette distance est* $a\sqrt{2}$ *et la vitesse, égale à* $a\omega\sqrt{2}$, *a un sens tel que le mobile se rapproche du point* O. *On demande le mouvement du point* M *et la pression qu'il exerce sur la circonférence.*

Résultats de la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \sin\theta, \qquad N = 2m\omega^2 a(3\sin^2\theta - 1).$$

CALCUL. — *Étant donnée une sphère de* 1^m *de rayon, calculer, avec cinq chiffres exacts, la hauteur d'un segment à une base dont le volume est le quart de celui de la sphère.* (Juillet 1906.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{1 - y^2}.$$

2° *Montrer que la courbe intégrale qui passe par le point* $x = 0$, $y = 1$ *peut être représentée par les équations*

$$x = \mathrm{L}\,\mathrm{tang}\,\frac{t}{2}, \qquad y = \sin t.$$

Construire cette courbe.

3° *Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des* x, *l'axe des* y *et la droite* $x = a$. *Limite de cette aire lorsque* a *croît indéfiniment.*

4° *Expression du rayon de courbure en un point de la courbe, en fonction du paramètre* t *correspondant à ce point.*

5° *En conclure les valeurs numériques des coordonnées des points d'inflexion de la courbe.*

6° *Volume du solide limité par la surface qu'engendre la courbe, en tournant autour de* Ox.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Évaluer l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{1 - x^2} - 1 - x^2}.$$

2° *Montrer que l'équation*

$$e^{-x} - x = 0$$

n'a qu'une racine. Calculer cette racine à $\frac{1}{100}$ *près.*

3° *Étant donnée la surface représentée par l'équation* $z = x^2 + y^2$, *on considère le solide compris entre la surface, le plan des* xy, *le cylindre* $y = x^2$ *et le plan* $y = 1$. *Volume de ce solide.* (Juillet 1906.)

Lille.

I. — ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Épreuve écrite. — 1° *Étant donnée, dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *la courbe* (Γ) *dont l'équation est*

$$x^2 y = 2a^3,$$

dans laquelle a désigne une longueur donnée, construire cette courbe et déterminer les coordonnées des points M_1 *et* M_2, *pieds des normales qui peuvent lui être menées de l'origine.*

2° *Calculer l'aire limitée par le segment* OM_1, *la courbe et l'axe* Ox.

3°
$$y = mx + p$$

étant l'équation d'une droite quelconque du plan, trouver la relation qui doit exister entre m et p pour que cette droite soit tangente à la courbe (Γ); *en déduire le lieu des points du plan d'où l'on peut mener à cette courbe deux tangentes rectangulaires et construire ce lieu.*

4° x *et* y *désignant les coordonnées d'un point de la courbe donnée, montrer que la sous-normale correspondante est égale à* $K\frac{y^2}{x}$, K *désignant un nombre constant; plus généralement, trouver toutes les courbes telles que la sous-normale soit égale à* $K\frac{y^{2n-1}}{x^{n}}$, *n étant un nombre donné, montrer que pour certaines valeurs de n les courbes trouvées sont des ellipses ou des hyperboles dont les axes sont* Ox *et* Oy.

5° *Calculer le volume commun au cylindre engendré par la rotation de la droite* M_1M_2 *autour de* Ox *et à un prisme dont les arêtes sont perpendiculaires au plan* xOy *et dont la base est le triangle* OM_1M_2.

II. — MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Travail des forces appliquées à un solide indéformable.*

2° *Un cube homogène* $ABCDD_1A_1B_1C_1$, *pesant* 5^{kg}, *reçoit un mouvement hélicoïdal uniforme autour de l'axe* Oz *d'un trièdre trirectangle fixe* $Oxyz$, *son arête* AA_1 *glissant sur la verticale ascendante* Oz. *Aux sommets* B *et* D *de la base inférieure, voisins de* A, *sont appliquées deux forces constantes de* 4^{kg}, *constamment parallèles l'une à* Ox *l'autre à* Oy. *Au sommet* C *de la même face est attaché un fil élastique tendu relié à* O, *exerçant en* C *une traction proportionnelle à son allongement et évaluée à* 20^{g} *par centimètre d'allongement. Enfin le cube est soumis à un couple résistant d'axe* Oz, *valant* $0^{kgm},1$. *Calculer en kilogrammètres le travail des forces énumérées pour un déplacement d'un pas.*

L'arête du cube est de $0^{m},10$. *Initialement* $OA = 0^{m},10$: AB *est parallèle à* Ox; *la tension du fil est nulle. La vitesse de rotation par seconde est* 2π *dans le sens direct autour de* Oz, *et celle de translation de* $0^{m},10$ *dans le sens* Oz. (Juillet 1906.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère une surface sphérique homogène qui attire un point* M *de masse* 1 *proportionnellement à l'inverse du carré de la distance. En raison de l'homogénéité de la surface, la fonction des forces*

$$V(x, y, z)$$

au point M *ne dépend que de la distance* ρ *du point* M *au centre de la sphère, que l'on prendra pour origine des coordonnées.*

On aura donc

$$(1)\qquad V(x, y, z) = F(\rho).$$

1° *Partant de l'égalité* (1), *on exprimera les dérivées*

partielles $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ *en fonction de* x, y, z, F, $\frac{dF}{d\rho}$, $\frac{d^2F}{d\rho^2}$.

2° *Montrer que l'équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

à laquelle on sait que V *satisfait, se réduit ici à une équation différentielle linéaire entre* F *et* ρ. *Donner l'intégrale générale de cette équation.*

3° *Montrer que, si l'on connaît la valeur de* V, *d'une part au centre de la sphère, d'autre part à l'infini, on pourra déterminer les constantes arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale, et obtenir la valeur de* V *pour un point quelconque situé, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de la sphère.*

4° *Achever le calcul en déterminant la valeur de* V *au centre de la sphère et à l'infini, à l'aide d'une intégrale double étendue à la surface de la sphère (suivant la définition de la fonction des forces).*

II. *Quelle est la limite de*

$$\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{\frac{1}{\sin(x^{-2})} + x}$$

quand x *tend vers l'infini par valeurs positives.*

Épreuve pratique. — *On considère une ellipse et une tangente fixe.*

Parallèlement à la tangente fixe TT' *on mène dans l'ellipse une corde* AB; *on projette les points* A *et* B *sur* TT', *ce qui forme un rectangle.*

Comment faut-il choisir la distance des parallèles AB *et* TT' *pour que ce rectangle ait une aire maximum.*

(Juillet 1906.)

Rennes.

Épreuve écrite. — *Déterminer les courbes planes dans lesquelles l'angle* α *que forme la tangente avec* Ox *est*

donné en fonction de l'abscisse par la formule

$$\sin\alpha = \frac{2ax}{a^2+x^2}.$$

1° *Montrer que ces courbes peuvent se représenter par l'une ou l'autre des équations*

$$(1) \qquad y = C \pm a\,L\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$(2) \qquad y = C \pm a\,L\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

2° *Étudier les deux courbes*

$$(1') \qquad y = a\,L\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$(2') \qquad y = a\,L\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

et faire voir que toutes les autres courbes considérées (1) *et* (2) *s'en déduisent par translation ou par symétrie.*

(*On déterminera la forme de la courbe, le rayon de courbure en fonction de l'abscisse, les asymptotes et les points d'inflexion s'il en existe.*)

3° *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes* (1) *et* (2).

Épreuve pratique. — *Calculer les intégrales*

$$J_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{1 - \cos\alpha \sin x},$$

$$J_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx\,(1 - \cos x)}{(1 - \cos\alpha \sin x)^2}.$$

(Juillet 1906.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Soient deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *En un point* M *quelconque de la courbe* E *on mène la tangente, qui coupe l'axe des* y *en* P, *et l'on élève* PA *perpendiculaire sur* PM.

1° *Calculer les coordonnées du point* M_1 *où la droite* PA *touche son enveloppe.*

2° *Déterminer la courbe* E *de façon que le segment* MM_1 *ait une longueur constante* a. *Quelle courbe décrit alors le point* M_1 ?

3° *Déterminer la courbe* E *de façon que la droite* MM_1 *passe constamment par l'origine. Quelles sont les trajectoires orthogonales de la famille de courbes ainsi trouvées ?*

II. *Un point matériel* M *non pesant, de masse égale à l'unité, est attiré par un point fixe* O *proportionnellement à sa distance. Ce point est mobile sur une droite fixe* D *avec un frottement de coefficient* f. *Le point* M *est primitivement en un point* A *de la droite, sans vitesse initiale. On désigne par* ω *la projection du point fixe* O *sur la droite fixe* D, *et l'on pose* $\omega A = a$, $\omega O = h$.

1° *Le point* M *se mettra-t-il en mouvement ?*

2° *S'il y a mouvement, étudier ce mouvement, et déterminer le point de la droite où la vitesse du mobile s'annulera pour la première fois.*

3° *Que se passera-t-il après cet instant, et, en supposant que l'on ait* $\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$ *et* $f = \frac{1}{9}$, *au bout de combien de temps le mobile s'arrêtera-t-il définitivement ?*

Épreuve pratique. — *Calculer une valeur approchée de l'intégrale*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-x^2}\, dx$$

par la méthode de Simpson, en divisant le champ d'intégration en six parties égales (on donne $\log e = 0,43429$).

(Juillet 1906.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1979.

(1903, p. 432.)

On considère une quadrique et un point O sur cette quadrique. Par O passe un plan variable. On prend le point de Frégier de la section relatif au point O. Lieu de ce point?

Ce lieu est en général une surface du quatrième ordre. Dans quel cas se réduit-elle à une surface du troisième ordre ou du deuxième ordre?

Quel est le lieu du même point en supposant que le plan variable soit astreint à passer par une droite fixe?

(E. Cahen.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Prenons pour axe des z la normale en O à la surface, pour axes des x et des y deux droites rectangulaires du plan tangent en O.

L'équation de la surface est

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' zx + 2 B'' xy + 2 C z = 0,$$

ou

$$f(x, y, z) + 2 C z = 0,$$

en désignant par $f(x, y, z)$ l'ensemble des termes du second degré.

Soit

$$ux + vy + wz = 0$$

un plan variable.

La normale en O à la section déterminée par ce plan a pour équations

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{-\frac{u^2 + v^2}{w}}.$$

Un point M quelconque de cette normale a pour coordonnées

$$(1) \qquad x = \lambda u, \qquad y = \lambda v, \qquad z = -\lambda \frac{u^2 + v^2}{w},$$

où λ est un paramètre variable.

Ce point M sera le point de Frégier de la section relatif à O si l'on détermine λ de façon que le plan $ux + vy + wz = 0$ coupe suivant deux droites rectangulaires l'un des cônes de sommet O, passant par l'intersection de la quadrique et d'un plan quelconque p mené par M.

Si l'on prend pour P le plan $z = -\lambda \frac{u^2 + v^2}{w}$, le cône correspondant a pour équation

$$f(x, y, z) - 2Cw \frac{z^2}{\lambda(u^2 + v^2)} = 0.$$

Le plan $ux + vy + wz = 0$ le coupera suivant deux droites rectangulaires, si l'on a

$$\left[A + A' + A'' - 2 \frac{Cw}{\lambda(u^2 + v^2)}\right](u^2 + v^2 + w^2)$$
$$- f(u, v, w) + \frac{2Cw^3}{\lambda(u^2 + v^2)} = 0$$

ou

$$(2) \qquad \lambda \Phi(u, v, w) - 2Cw = 0$$

en posant

$$\Phi(u, v, w) = (A + A' + A'')(u^2 + v^2 + w^2) - f(u, v, w).$$

Éliminant λ, u, v, w, entre les équations (1) et (2), on obtient comme équation du lieu

$$\Phi[xz, yz, -(x^2 + y^2)] + 2Cz(x^2 + y^2) = 0,$$

qui est une surface du quatrième degré en général.

Développant l'équation trouvée, elle s'écrit

$$(3) \quad \begin{cases} (A + A')(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - z^2(Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy) \\ \qquad + z(x^2 + y^2)(A''z + 2By + 2B'x) + 2Cz(x^2 + y^2) = 0. \end{cases}$$

Cette surface s'abaissera au troisième degré, si $z = 0$ est

en facteur, ce qui exige que l'on ait

$$A + A' = 0.$$

Dans ce cas, le plan $z = 0$, occupe la surface donnée suivant deux droites rectangulaires ; donc le point O est un point de l'intersection de la quadrique avec sa sphère de Monge.

Le lieu se réduira à une surface du deuxième degré, si $(x^2 + y^2)$ est en facteur, ce qui exige $A = A'$, $B'' = 0$, le point O est alors un ombilic de la quadrique.

Considérons maintenant le cas où le plan variable est astreint à passer par une droite fixe D, que nous pouvons supposer dans le plan des xz.

Les équations de cette droite seront

$$y = 0,$$
$$x - mz = 0,$$

et entre u, v, w on aura la relation $um + w = 0$ qui, avec les équations (1), donne

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - mxz = 0.$$

Le lieu cherché est l'intersection des deux surfaces (3) et (4).

En remplaçant dans (3) $(x^2 + y^2)$ par sa valeur tirée de l'équation (4), on voit sans difficulté que le lieu cherché est défini par les équations

$$x^2 + y^2 - mxz = 0,$$

$$xz^2\{[(A + A')m^2 - 2B'm + A' - A]x + 2(Bm - B'')y + (A - A'')mz - 2Cm\} = 0.$$

Ce lieu se décompose en l'axe des z, les droites isotropes passant par l'origine dans le plan des xOy et enfin une conique intersection du cône

$$x^2 + y^2 - mxz = 0$$

et du plan

$$[(A + A')m^2 - 2B'm + A' - A]x + 2(Bm - B'')y + (A - A')mz - 2Cm = 0.$$

C'est le lieu cherché.

1995.

([illegible])

Étant donnés deux ternes de points ABC *et* A′B′C′, *si* D *est un point de la cubique gauche qui passe par ces six points, les quadriques, en nombre doublement infini, qui sont inscrites aux deux tétraèdres* DABC *et* D′A′B′C′ *passent par la droite d'intersection des plans* (ABC) *et* (A′B′C′) (*ce qui constitue d'ailleurs une condition simple*).

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soit Δ la droite d'intersection des deux plans (ABC), (A′B′C′). Appelons α, β, γ les points d'intersection de la cubique gauche et d'un plan variable passant par Δ. Les plans $(D\alpha\beta)$, $(D\beta\gamma)$, $(D\gamma\alpha)$ enveloppent un cône G qui, on le voit immédiatement, est de la seconde classe et par conséquent du second ordre, puisque, par la droite $D\alpha$, par exemple, il ne passe que deux plans tangents à ce cône, le plan $(D\alpha\beta)$ et le plan $(D\alpha\gamma)$.

Le cône (G) est évidemment tangent aux plans (DAB), (DBC), (DCA), (DA′B′), (DB′C′), (DC′A′) et $(D\Delta)$. Donc toute quadrique tangente aux six premiers points est tangente au septième. Il en résulte bien que les quadriques dont il est question dans l'énoncé contiennent la droite Δ, puisque par cette droite on peut mener trois plans tangents à l'une quelconque d'entre elles, à savoir les plans (ABC), (A′B′C′) et $(D\Delta)$.

2004.

(1904, p. 428.)

Soit une ellipse de foyers F, F′. *En chaque point* M *de l'ellipse on prend sur la normale en* M *deux points* N *et* N′ *tels que*

$$MN = MN' = \sqrt{MF.MF'}.$$

On considère les cercles de centre N *et* N′ *et de rayons* NM *et* N′M. *Les tangentes communes à chacun de ces cercles et à l'ellipse rencontrent la tangente en* M *à l'ellipse en*

quatre points P, Q, P′, Q′ *dont le lieu se compose d'une ellipse et d'une hyperbole.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ et soient $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ les coordonnées de M.

On sait que

$$MF.MF' = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi$$

et, si l'on désigne par N le point obtenu en portant la longueur indiquée sur la normale vers la convexité de la courbe, par N′ l'autre point, on voit aisément que leurs coordonnées sont

$$x = (a+\varepsilon b)\cos\varphi,$$
$$y = \varepsilon(a+\varepsilon b)\sin\varphi,$$

avec $\varepsilon = +1$ pour le point N, $\varepsilon = -1$ pour le point N′.

O étant l'origine, les tangentes à l'ellipse, parallèles à ON, sont à une distance de O, et par suite de N, égale à

$$\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi};$$

donc ce sont les tangentes communes à l'ellipse et au cercle (N); de même les tangentes communes à l'ellipse et au cercle (N′) seront parallèles à ON′.

Le lieu cherché est donc défini par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab = 0, \\ x\sin\varphi - \varepsilon y\cos\varphi \pm \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = 0. \end{cases}$$

m et m' désignant les coefficients angulaires de ces deux droites, on a

$$(2)\qquad mm' = -\varepsilon\frac{b}{a},$$

indépendant de φ.

Si donc M_1 est le point de contact de l'ellipse et d'une tangente parallèle à ON, N_1 le point relatif à M_1, la droite ON_1

sera parallèle à la tangente en M et le cercle (N_1) sera tangent à cette dernière.

Posant $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = m$, les équations (1) s'écrivent

$$(3)\quad \begin{cases} a^2(y^2-b^2)m^2 + 2abxym + b^2(x^2-a^2) = 0, \\ (x^2-a^2)m^2 - 2xym + (y^2-b^2) = 0, \end{cases}$$

qui, d'après la remarque faite, ont, pour un point du lieu, deux racines communes, ce qui exige

$$\frac{a^2(y^2-b^2)}{x^2-a^2} = \frac{ab}{\varepsilon} = \frac{b^2(x^2-a^2)}{y^2-b^2},$$

d'où pour équation du lieu

$$\frac{x^2}{a(a-\varepsilon b)} - \varepsilon\frac{y^2}{b(a-\varepsilon b)} - 1 = 0,$$

ce qui représente une ellipse et une hyperbole, toutes deux circonscrites au rectangle construit sur les axes de l'ellipse donnée.

Remarque. — Ce calcul suppose que les deux tangentes dont il a été question dans la remarque faite plus haut, ne sont pas confondues. La relation (2) montre que ce cas se présentera pour

$$m^2 = -\varepsilon\frac{b}{a};$$

soit $\varepsilon = -1$, on a $m = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ et les équations (3) donnent comme lieu singulier les quatre droites

$$\sqrt{a}\,y \pm \sqrt{b}\,x \pm \sqrt{ab(a+b)} = 0,$$

qui sont les droites, autres que les axes, obtenues en joignant deux à deux les quatre sommets de l'ellipse lieu; elles sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole et tangentes à l'ellipse donnée en des points A_1, A_2, A_3, A_4.

On voit aisément que, lorsque M se trouve en A_1, par exemple, le point N′ est le centre de courbure de l'ellipse en A_1 et par suite le cercle (N′) a, avec l'ellipse donnée, trois tangentes confondues avec la tangente en A_1. La normale

en A_1 est à une distance de O égale à $(a - b)$, donc incidemment on voit que le cercle de centre O et de rayon $(a - b)$ est tangent en quatre points à la développée de l'ellipse.

Autre solution de M. Panvin.

2011.

([illegible], p. [illegible].)

Sur la normale au point m d'une ellipse de centre o, et extérieurement à cette courbe, on porte le segment mp égal au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en m.

Démontrer que les droites pm, po sont également inclinées sur les tangentes à l'ellipse issues de p.

(Mannheim.)

SOLUTION

Par M. Klug.

Construisons le cercle qui passe au point p et dont le centre est le point de rencontre de la tangente en m à l'ellipse et du petit axe de cette courbe. Appelons respectivement q, r, f, g les points de rencontre de ce cercle avec les droites pm, op et avec le grand axe de l'ellipse.

Les deux axes sont, comme l'on sait, les bissectrices des angles poq, $\widehat{roq}$, et l'on a de plus, avec les notations habituelles,

$$op = a + b, \qquad oq = or = a - b,$$

d'où l'on tire

$$\overline{of}^2 = \overline{og}^2 = fo.og = op.ro = a^2 - b^2 = c^2.$$

Par suite les points f et g sont les foyers de l'ellipse. Les droites po, pm sont également inclinées sur les droites pf, pg et par suite sur les tangentes issues du point m à l'ellipse.

C. Q. F. D.

Autres solutions de MM. Barisien et H. Lez.

2027.

(1905, p. [illegible].)

Le lieu du centre des ellipses surosculatrices en chaque point d'une ellipse donnée, et ayant une aire constante, est une ellipse. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

L'ellipse donnée est la projection d'un cercle C, l'ellipse surosculatrice en un point M est la projection d'une ellipse E_1 surosculatrice au point du cercle dont la projection est M, ce point M_1 est un sommet de l'ellipse E_1. l'aire de l'ellipse E_1 est constante, donc cette ellipse est constante en grandeur et son centre décrit un cercle concentrique au cercle C ; le lieu cherché est la projection de ce cercle, c'est-à-dire une ellipse homothétique et concentrique à l'ellipse donnée.

QUESTIONS.

2052. Soient a, b, c, d des fonctions d'une variable x : *a priori* on peut mettre l'expression $\frac{az+b}{cz+d}$ sous la forme $\frac{m'z+n'}{mz+n}+\lambda$, l'accent indiquant une dérivée ; exprimer la fonction λ au moyen des fonctions a, b, c, d et de leurs dérivées.

Applications aux deux formes de l'intégrale d'une équation de Riccati :

$$y=\frac{Ca+b}{Cc+d},\qquad y=\frac{1}{X}\,\frac{C_1p'+q'}{C_1p+q}.$$

(*Voir* une Note de M. Raffy, *Nouvelles Annales*, 1902, p. 529.)

G. F.

2053. La conique, qui touche les côtés d'un triangle donné ainsi que les perpendiculaires élevées du centre de son cercle inscrit aux droites qui joignent ce point aux extrémités de l'un de ces côtés, est tangente au cercle inscrit au triangle.

(*Canon.*)

2054. Les axes des coniques ayant un contact du troisième ordre avec une courbe en un point M donné sont tangentes à une parabole.

(A. Pellet.)

NÉCROLOGIE.

Nous avons la douleur de faire part à nos lecteurs du décès de M. le colonel A. MANNHEIM, qui a succombé à une courte maladie, le 11 décembre 1906, à l'âge de 75 ans.

Cette perte sera cruellement ressentie dans les milieux scientifiques, en particulier aux *Nouvelles Annales*, dont M. Mannheim était, depuis bien des années, le fidèle collaborateur. Tous nos lecteurs ont présentes à l'esprit ces Notes brèves et ingénieuses où l'auteur mettait en lumière, parfois à l'occasion des sujets les plus simples, les ressources de son exceptionnelle vision géométrique.

La Rédaction exprime à la famille du regretté Savant sa bien vive et douloureuse sympathie.

Le temps nous fait aujourd'hui défaut pour parler en détail de l'œuvre de M. Mannheim. Nous tenterons de le faire, dans un très prochain numéro, avec le soin et le respect qui conviennent.

LA RÉDACTION.

[K13c]

VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE EN FONCTION DES ARÊTES; DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE;

Par M. G. FONTENÉ.

Étant donné un tétraèdre ABCD, soient α, β, γ, δ les coefficients barycentiques dont il faut affecter les sommets pour que le barycentre soit le centre O de la sphère circonscrite. On a, pour tout point M de l'espace,

$$\sum \alpha \overline{\mathrm{MA}}^2 = \lambda \,\mathrm{MO}^2 + \text{const.};$$

on détermine la constante en mettant M au point O, et l'on a

$$\sum \alpha \overline{\mathrm{MA}}^2 = \lambda (\mathrm{MO}^2 + \mathrm{R}^2).$$

Si l'on met successivement le point M en A, B, C, D, en désignant par a, b, c les côtés du triangle ABC, et par a', b', c' les longueurs DA, DB, DC, on a

$$\beta c^2 + \gamma b^2 + \delta a'^2 = 2\lambda \mathrm{R}^2,$$
$$\alpha c^2 \qquad + \gamma a^2 + \delta b'^2 = 2\lambda \mathrm{R}^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

on a d'ailleurs

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \lambda.$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a'^2 & 2\mathrm{R}^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & b'^2 & 2\mathrm{R}^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & c'^2 & 2\mathrm{R}^2 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 & 2\mathrm{R}^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a'^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & b'^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & c'^2 & 1 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times 2R^2 + \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a'^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & b'^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & c'^2 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on multiplie les lignes de ce dernier déterminant par $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}, \frac{a}{a'}\frac{b}{b'}\frac{c}{c'}$, puis les trois premières colonnes par $\frac{b'}{b}\frac{c'}{c}, \frac{c'}{c}\frac{a'}{a}, \frac{a'}{a}\frac{b'}{b}$, ce qui ne change pas sa valeur, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & cc' & bb' & aa' \\ cc' & 0 & aa' & bb' \\ bb' & aa' & 0 & cc' \\ aa' & bb' & cc' & 0 \end{vmatrix}$$

ou

$$-(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(cc'+aa'-bb')\ldots$$

ou, d'après la formule de Brassine (¹),

$$-16 \times (6VR)^2.$$

On a donc

$$8 \times (6V)^2 = \Delta,$$

en appelant Δ le déterminant qui est multiplié par $2R^2$ dans la relation écrite plus haut.

C'est la formule cherchée.

(¹) La formule de Brassine (*Nouvelles Annales*, 1847, p. 226) a été retrouvée par de Staudt (*Ibid.*, 1859, p. 441). J'ai montré ailleurs que cette formule s'obtient en transformant par rayons vecteurs réciproques la formule $S = \sqrt{p(p-a)\ldots}$; or il me semble maintenant que j'ai vu autrefois cette démonstration dans les *Nouvelles Annales*.

[R7b3]

RECHERCHE DE LA LOI QUE DOIT SUIVRE UNE FORCE CENTRALE, SACHANT QUE LA TRAJECTOIRE EST UNE CONIQUE, QUELLES QUE SOIENT LES CONDITIONS INITIALES;

Par M. Paul-J. Suchar.

Ce problème a été résolu, comme on sait, par MM. Darboux et Halphen [1] dans le cas particulier où la loi de la force ne dépend que de la position du mobile. Je me propose de résoudre le problème dans le cas plus général, en supposant la loi de la force fonction de la position du mobile et des composantes de la vitesse sur les axes de coordonnées.

1. Soient

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dx'}{dt} = ux, \qquad \frac{dy'}{dt} = uy,$$

les équations du mouvement rapporté à un système d'axes, ayant pour origine le centre de la force, la masse du point étant supposée égale à 1, et u est une fonction dépendant en général de x, y, x', y'; enfin

$$(2)\qquad f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

l'intégrale générale du système (1). Différentions (2) par rapport à t, on aura

$$(3)\qquad x' f_x + y' f_y = 0.$$

---

(1) *Comptes rendus*, t. LXXXIV.

Si nous rendons (2) homogène et si nous désignons par γ la constante des aires, on aura d'après (3) et en ayant égard au théorème d'Euler sur les fonctions homogènes

$$(4) \qquad \frac{x'}{f'_y} = -\frac{y'}{f'_x} = \frac{\gamma}{f'_z},$$

d'où

$$(5) \qquad x' = \gamma \frac{f'_y}{f'_z}, \qquad y' = -\gamma \frac{f'_x}{f'_z}.$$

Différentions une seconde fois (3) par rapport à t, et, en ayant égard au théorème d'Euler sur les fonctions homogènes et aux équations (1), (2) et (3), on aura, tous calculs faits,

$$u = \gamma^2 \frac{A f'^2_y - 2B f'_x f'_y + C f'^2_x}{f'^3_z}.$$

Remarquons que le numérateur

$$A f'^2_y - 2B f'_x f'_y + C f'^2_x,$$

pour tous les points de la conique (2), est une constante, et cette constante a pour valeur $-\Delta$, Δ étant le discriminant de la conique (2). On aura donc

$$u = -\frac{\gamma^2 \Delta}{f'^3_z};$$

en ayant égard à (4), on aura enfin

$$u = -\frac{\gamma^2 \Delta}{f'^3_z} = -\frac{\Delta}{\gamma} \frac{x'^3}{f'^3_y} = \frac{\Delta}{\gamma} \frac{y'^3}{f'^3_x},$$

d'où l'on déduit les trois lois de forces

$$(6) \qquad \frac{\mu r}{(Dx + Ey + F)^3}, \quad \frac{\mu r x'^3}{(Bx + Cy + E)^3}, \quad \frac{\mu r y'^3}{(Ax + By + D)^3}.$$

On retrouve ainsi une des lois de MM. Darboux et

Halphen, et deux autres lois. Ces deux dernières lois ne sont pas distinctes, elles se déduisent l'une de l'autre par une permutation des axes de coordonnées. Il suffit alors de montrer que la deuxième loi satisfait bien au problème, c'est-à-dire qu'elle fera décrire à son point d'application une conique, quelles que soient les conditions initiales.

2. Nous allons nous appuyer sur la remarque suivante : soit

$$(7)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

une équation différentielle du second ordre. Cette équation se ramène toujours à des quadratures si $f(x, y)$ est une fonction homogène et de degré -3. En effet, l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-3}\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

posons

$$y = zx, \qquad x = \frac{1}{\zeta},$$

et l'équation précédente se ramène à

$$\frac{d^2z}{d\zeta^2} = \varphi(z).$$

3. Considérons maintenant les équations du mouvement correspondant à la loi de force

$$\frac{\mu r x'^3}{(Bx + Cy + E)^3},$$

on aura

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y',$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{\mu x'^3}{(Bx + Cy + E)^3}x, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\mu x'^3}{(Bx + Cy + E)^3}y.$$

On déduit des deux dernières équations

$$x^3 \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu\gamma x^3}{(Bx + Cy + E)^3},$$

où γ est la constante des aires, d'où enfin

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu\gamma}{(Bx + Cy + E)^3},$$

équation différentielle de la trajectoire cherchée. Cette équation se ramène au type (7) du n° 2, en faisant le changement de la variable indépendante, en posant

$$Bx + E = Bx_1.$$

En effectuant les calculs du n° 2, on aura pour l'équation de la trajectoire

$$(8) \qquad (Bx + Cy + E)^2 = ax^2 + 2bx + c;$$

elle renferme trois paramètres ne figurant pas dans l'expression de la force. Il en résulte que les trajectoires correspondant à la loi précédente sont des coniques ayant la droite donnée

$$Bx + Cy + E = 0$$

pour diamètre, et l'axe des y pour direction conjuguée. Dans le cas particulier où la constante $C = 0$, en reprenant l'équation différentielle de la trajectoire, on trouve pour la trajectoire des coniques, ayant la droite donnée

$$Bx + E = 0$$

pour asymptote.

4. Remarquons que des deux premières lois de forces données par (6), ainsi que de leurs trajectoires correspondantes, on déduit comme conséquence les

deux lois

$$(9)\qquad \frac{\mu r}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad \frac{\mu x^{-3} r}{(ax^2+2bx+c)^{\frac{3}{2}}}.$$

On trouve ainsi la deuxième loi de MM. Darboux et Halphen, et une nouvelle loi qui satisfait au problème. On vérifie sans peine que les trajectoires correspondant à la dernière de ces lois sont des coniques tangentes aux deux droites données

$$ax^2+2bx+c=0.$$

5. Nous allons montrer que des quatre lois données par (6) et (9) on peut déduire quatre autres lois distinctes. Nous allons rappeler quelques remarques faites dans un travail *Sur une transformation réciproque en Mécanique* (*Bull. de la Soc. des Sciences*, t. XXXIII).

Supposons un mobile sollicité par une force centrale, et soit

$$F = ur$$

la loi de la force; le centre de la force étant à l'origine des axes de coordonnées, u est une fonction quelconque et r le rayon vecteur. Si le temps n'entre pas explicitement dans la fonction u, et si, pour une certaine fonction de u pouvant dépendre en général de x, y et de leurs dérivées par rapport à t, on sait déterminer le mouvement correspondant à la force F, on saura aussi déterminer le mouvement si la loi de la force est de la forme

$$F = \frac{1}{u} r,$$

où $\frac{1}{u}$ est l'inverse de la fonction précédente et sur laquelle on a fait le changement de x et y en x' et y' et

de x' et y' en x et y. En effet, les équations du mouvement correspondant à la première loi de force sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ux, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = uy.$$

Effectuons le changement des fonctions et de la variable en posant

$$x_1 = \frac{dx}{dt} = x', \qquad y_1 = \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dt_1}{dt} = u.$$

Il résulte des équations du mouvement et de ces dernières relations qu'on aura aussi

$$x = \frac{dx_1}{dt_1} = x_1', \qquad y = \frac{dy_1}{dt_1} = y_1',$$

d'où l'on déduit, pour les équations du mouvement du point x_1, y_1,

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} = \frac{1}{u}x_1, \qquad \frac{d^2y_1}{dt_1^2} = \frac{1}{u}y_1,$$

et la proposition est démontrée.

Cette transformation nous montre que la trajectoire du second point est la courbe hodographe du premier point, et inversement. Nous savons aussi, d'après le travail cité, que la courbe hodographe correspondant à une force centrale est la polaire réciproque de la trajectoire par rapport à un cercle ayant pour centre le centre de la force qui est pris aussi pour origine de l'hodographe, son rayon étant $\sqrt{\gamma}$, γ étant la constante des aires, et tournée d'un angle droit autour de ce centre. Il résulte alors que, si en particulier la trajectoire correspondant à une force centrale est une conique, la courbe hodographe sera aussi une conique, et, par conséquent, d'après l'ensemble de ces remarques, de toute loi de force centrale, faisant dé-

crire à son point d'application une conique, on peut déduire une autre loi de force faisant aussi décrire à son point d'application une conique. Il résulte alors d'après (6) et (9) les quatre lois de force :

$$\mu\frac{(Bx' + Cy' + E)^3}{r^3}r, \qquad \mu\frac{(ax'^2 + 2bx' + c)^{\frac{3}{2}}}{x^3}r,$$

$$\mu(Dx' + Ey' + F)^3 r, \qquad \mu(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{\frac{3}{2}} r.$$

6. Il est facile de vérifier directement que ces quatre lois de force satisfont au problème. En effet, les équations du mouvement correspondant à la première loi de force sont :

$$\frac{dx'}{dt} = \mu\frac{(Bx' + Cy' + E)^3}{r^3}x, \qquad \frac{dx}{dt} = x',$$

$$\frac{dy'}{dt} = \mu\frac{(Bx' + Cy' + E)^3}{r^3}y, \qquad \frac{dy}{dt} = y',$$

d'où l'on a déduit, par division,

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{y}{x}.$$

Différentions cette dernière relation en prenant x' pour variable indépendante et en regardant x et y fonctions de x' par l'intermédiaire de t, on aura

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{\gamma}{x^2\dfrac{dx'}{dt}},$$

d'où enfin

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{\gamma}{\mu}\frac{1}{(Bx' + Cy' + E)^3},$$

qui est l'équation différentielle de la courbe hodographe correspondant au mouvement cherché. Cette équation ne diffère de l'équation du n° 3 que par le changement de x et y en x' et y' ; il en résulte, par un

calcul semblable, que la courbe hodographe est une conique renfermant trois paramètres arbitraires. Il suffit ensuite, comme nous l'avons expliqué, de chercher la polaire réciproque de cette courbe par rapport au cercle en question et de la faire tourner d'un angle droit autour de ce centre pour avoir la trajectoire du mouvement. On suivra une méthode analogue pour la deuxième loi de force.

7. Dans le travail déjà cité, nous avons indiqué une formule analogue à celle de Binet, à savoir

$$-\frac{v'^2}{v^2}\left[\frac{d^2\frac{1}{v}}{d\alpha^2}+\frac{1}{v}\right]=\frac{rv}{F},$$

où F représente la force, v la vitesse et α l'angle de la vitesse avec l'axe polaire. A l'aide de cette formule, on vérifie que les deux dernières lois de forces satisfont aussi au problème.

8. La méthode que nous avons employée nous montre qu'il existe des lois de force satisfaisant au problème. Le problème sera déterminé et entièrement résolu si le nombre de ces lois est limité et si de plus on a déterminé toutes ces lois. Il est facile de voir que le nombre de ces lois est limité et égal à huit, et que de plus il n'existe pas d'autres lois de force que les huit lois que nous avons déjà trouvées.

En effet, supposons le centre de la force à l'origine des axes de coordonnées, la loi de la force sera alors de la forme

$$F = ur.$$

On sera alors ramené à chercher le nombre des lois de

force satisfaisant au problème, en subdivisant la recherche en plusieurs cas :

1° La fonction u ne dépend que de x et y ;

2° La fonction u dépend de x' et y' ;

3° La fonction u dépend de x' ou y' et des coordonnées x et y, ou d'une seule de ces coordonnées, ou encore d'une seule des coordonnées x ou y et de x' et y', ou d'une seule de ces composantes ;

Enfin :

4° La fonction u dépend à la fois de x, y, x' et y'.

Le premier cas a été déjà résolu par MM. Darboux et Halphen. Nous allons reprendre le raisonnement, en indiquant une méthode qui s'applique dans tous les cas.

Soient :

$$F = \varphi(x, y) r$$

la loi de la force et

$$f(x, y) = 0$$

la conique correspondante.

Si nous multiplions la première des équations du mouvement correspondant à cette dernière loi de force par $-x'$ et la seconde par y', et qu'on les ajoute, on aura

$$x'^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = -\gamma\varphi(x, y),$$

où γ est la constante des aires.

L'équation de la conique nous donne

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\Delta}{f_y^3},$$

où Δ est le discriminant de la conique ; on aura donc, en ayant égard à (4) du n° 1,

$$\frac{\gamma^3 \Delta}{f_y^3} = -\gamma\varphi(x, y) ;$$

si, de plus, nous rendons l'équation de la conique homogène, on aura, en ayant égard à l'équation de la conique,

$$f_z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2;$$

on aura donc finalement

$$(10) \qquad \frac{\gamma^3 \Delta}{f_z^3} = \frac{\gamma^3 \Delta}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{3}{2}}} = -\gamma\varphi(x, y).$$

Remarquons que ces relations doivent toujours avoir lieu en tous les points de la conique $f(x, y) = 0$, et cela quelles que soient les conditions initiales; car, si l'on passe d'une conique à une autre conique de la même famille correspondant à la loi

$$F = \varphi(x, y)\,r,$$

les constantes qui figurent dans les premières fonctions de (10) varient en général avec les conditions initiales, mais ces relations auront encore lieu le long de la seconde conique.

Je dis que l'une des deux équations (10), dont l'un des membres est $-\gamma\varphi(x, y)$, doit être une identité. En effet, si le contraire a lieu, il sera alors possible d'établir entre x et y une seconde relation distincte de la relation $f(x, y) = 0$, ce qui est absurde. Il résulte alors qu'il ne peut y avoir que deux lois de force dépendant de la position du mobile, et ces deux lois sont les deux lois

$$\frac{\mu r}{(ax + by + c)^3}, \qquad \frac{\mu r}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

que nous avons trouvées déjà.

Il en résulte comme conséquence que, si u ne dépend que de x' et y', il ne peut y avoir que deux lois satis-

faisant au problème. En effet, soit

$$F = \varphi(x', y')\, r$$

une loi de force, laquelle, d'après le n° 4, correspond, par une transformation corrélative, à la loi

$$\frac{1}{\varphi(x, y)}\, r,$$

qui, comme la première, satisfait aussi au problème; mais cette dernière loi ne dépend que de la position du mobile et, d'après la remarque précédente, il n'y a que deux lois de force répondant au problème; il s'ensuit alors qu'on ne peut avoir que les deux lois

$$\mu(ax' + by' + c)^3 r, \qquad \mu(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{\frac{3}{2}} r,$$

que nous avons trouvées déjà.

Un raisonnement analogue au premier raisonnement, et en ayant égard à (4) du n° 1, nous montre que, si la loi de la force est de la forme

$$F = \varphi(x', x, y)\, r \qquad \text{ou} \qquad F = \varphi(x', x)\, r,$$

il ne peut y avoir que deux lois, à savoir

$$\frac{x'^3 r}{(ax + by + c)^3}, \qquad \frac{x'^3 r}{(ax^2 + 2bx + c)^{\frac{3}{2}}},$$

que nous avons trouvées déjà, sans quoi il sera possible d'établir entre les coordonnées x et y une seconde relation distincte de l'équation de la conique $f(x, y) = 0$, ce qui est absurde. Il en résulte, comme conséquence, par la transformation corrélative, qu'il n'y a que les deux lois

$$x^{-3}(ax' + by' + c)^3 r, \qquad x^{-3}(ax'^2 + 2bx' + c)^{\frac{3}{2}} r.$$

Il nous reste enfin à examiner le cas où la fonction u dépend à la fois de x, y, x' et y'.

Remarquons d'abord que la loi

$$\left(\frac{\lambda' x' + \mu' y'}{\lambda x + \mu y + \nu}\right)^3 r,$$

qui résulte comme conséquence des relations (4) du n° 1, et où λ, μ, ν, λ', μ' sont des constantes, satisfait au problème, de même que la loi qui résulte par la transformation corrélative

$$\left(\frac{\lambda x' + \mu y' + \nu}{\lambda' x + \mu' y}\right) r.$$

Remarquons aussi que ces deux lois ne sont pas nouvelles, c'est-à-dire distinctes de celles que nous avons trouvées déjà. En effet, il suffit de faire une transformation des axes de coordonnées ayant la même origine, pour ramener ces lois aux deux lois

$$\frac{K x_1'^3}{(\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 + \nu)^3} r_1, \qquad K_1 \frac{(\lambda_1 y_1' + \mu_1 x_1' + \nu_1)^3}{x_1'^3} r_1,$$

que nous avons déjà déterminées.

Il en résulte alors que toute loi de force de la forme

$$F = \varphi(x, y, x', y') r$$

doit, d'après (4), se réduire à l'une ou l'autre des deux lois précédentes; sans quoi il sera possible de trouver entre x et y une seconde relation distincte de la conique $f(x, y) = 0$, ce qui est absurde.

En résumé, le problème est entièrement résolu et n'admet d'autres lois de force que les huit lois :

$$\mu(ax + by + c)^{-3} r, \qquad \mu(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-\frac{3}{2}} r,$$

$$\mu(ax' + bx' + c)^3 r, \qquad \mu(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{\frac{3}{2}} r,$$

$$\mu x'^3 (ax + by + c)^{-3} r, \qquad \mu x^{-3}(ax^2 + 2bx + c)^{-\frac{3}{2}} r,$$

$$\mu x^{-3}(ax' + by' + c)^3 r, \qquad \mu x'^{-3}(ax'^2 + 2bx' + c)^{\frac{3}{2}} r.$$

9. Nous allons terminer par quelques théorèmes généraux conduisant à des trajectoires qui sont des coniques.

Théorème I. — *Si l'on donne une droite* D *et un point* O, *et si un point matériel se meut dans le plan de la droite et du point sous l'action d'une force telle que, si en chaque point de la courbe hodographe correspondant au mouvement le moment de la vitesse du point géométrique de la courbe hodographe, par rapport au point* O *pris pour origine de la courbe hodographe, est proportionnel au cube du moment de la vitesse du point correspondant de la trajectoire par rapport au même point* O *et inversement proportionnel au cube de la distance du même point de la trajectoire à la droite* D, *la trajectoire sera une conique ayant la droite* D *pour polaire et le point* O *pour pôle.*

Théorème II. — *Si un point matériel se meut dans un plan sous l'action d'une force telle que, si en chaque point de la courbe hodographe le moment de la vitesse du point géométrique de la courbe hodographe, par rapport à un point fixe* O *du plan de la trajectoire pris pour origine de l'hodographe, est proportionnel au cube du moment de la vitesse du point correspondant de la trajectoire par rapport au même point fixe, la trajectoire sera une conique ayant le point fixe pour centre.*

Théorème III. — *Si un point matériel se meut dans un plan sous l'action d'une force telle que, si en chaque point de la courbe hodographe le moment de la vitesse du point géométrique de la courbe*

hodographe, par rapport à un point fixe du plan de la trajectoire pris pour origine de la courbe hodographe, est proportionnel au cube du moment de la vitesse du point correspondant de la trajectoire par rapport au même point, et inversement proportionnel au cube de la distance du même point de la trajectoire au point fixe, la trajectoire sera une conique ayant le point fixe pour foyer.

Les réciproques de ces théorèmes sont aussi vraies.

La démonstration des théorèmes énoncés ci-dessus peut se faire en s'appuyant sur le théorème général suivant, qui est une interprétation géométrique de l'une des équations intrinsèques d'Euler :

Si un mobile se meut dans un plan, le moment de la vitesse du point géométrique de la courbe hodographe par rapport à un point du plan de la trajectoire pris pour origine de l'hodographe est en raison directe du cube de la vitesse du point correspondant de la trajectoire et en raison inverse du rayon de courbure.

On peut établir ce problème soit en partant de l'équation d'Euler, soit encore en partant des équations du mouvement; on aura, dans ce dernier cas,

$$x'^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{Mt}(v_1),$$

où $\mathrm{Mt}(v_1)$ est le moment de la vitesse du point géométrique de la courbe hodographe, par rapport à l'origine des axes de coordonnées qui est aussi l'origine de la courbe hodographe.

Si nous désignons par ρ le rayon de courbure en un

point de la trajectoire, on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left[1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho},$$

d'où enfin

$$M(c_1) = \frac{v^3}{\rho}.$$

A l'aide de ce théorème, la démonstration des trois théorèmes se ramène à chercher les courbes telles qu'en chaque point on ait

$$\rho = K\frac{d^3}{p^3}, \qquad \rho = \frac{K}{p^3}, \qquad \rho = K\frac{r^3}{p^3},$$

où K est une constante, d est la distance d'un point de la trajectoire à la droite D, p est la distance du point fixe à la tangente à la trajectoire, et r est le rayon vecteur.

Nous avons montré dans une Note, *Sur le rayon de courbure d'une conique* (*Nouv. Ann.*, 4e série, t. III), que les courbes correspondantes sont bien les coniques qui figurent dans les énoncés des théorèmes précédents.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1906).

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE [1];

PAR M. PARROD.

1° Éliminons y, p, z entre les quatre premières équations, après simplification, il vient

$$x\,du - d\alpha - q\,x\,d\beta = 0$$

[1] *Voir* l'énoncé dans le numéro de septembre, p. 4[illegible]8.

ou

$$x(u'_\alpha\, d\alpha + u'_\beta\, d\beta) + d\alpha - q\, x\, d\beta = 0.$$

Identifions et résolvons les équations

$$x = -\frac{1}{u'_\alpha}, \qquad p = u - \beta u'_\beta,$$
$$y = \beta x, \qquad q = u'_\beta.$$
$$z = \alpha - u x.$$

Lorsque

$$u''_{\alpha^2} = 0, \qquad u = \alpha \mathrm{H} + \mathrm{H}_1,$$

H et H_1 étant des fonctions de β seule ; alors x, y et z sont seulement fonctions de β, la surface S se réduit à une courbe.

Cette condition est nécessaire, en effet ; il faut que

$$\frac{x'_\alpha}{x'_\beta} = \frac{y'_\alpha}{y'_\beta} = \frac{z'_\alpha}{z'_\beta}$$

ou

$$\frac{x'_\alpha}{x'_\beta} = \frac{\beta x'_\alpha}{\beta x'_\beta - x} = \frac{1 - u'_\alpha x + u x'_\alpha}{u'_\beta x - u x'_\beta};$$

or

$$1 + u'_\alpha x = 0,$$

donc ces égalités n'ont lieu que si

$$x'_\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad u''_{\alpha^2} = 0.$$

L'équation générale des lignes asymptotiques est

$$\mathrm{D}\, d\alpha^2 + 2\,\mathrm{D}'\, d\alpha\, d\beta + \mathrm{D}''\, d\beta^2 = 0.$$

Le plan tangent ayant pour équation

$$\mathrm{Z} - z = p(\mathrm{X} - x) + q(\mathrm{Y} - y),$$

on a

$$\mathrm{D} = p x''_{\alpha^2} + q y''_{\alpha^2} - z''_{\alpha^2} = + u''_{\alpha^2} x,$$
$$\mathrm{D}' = p x''_{\alpha\beta} + q y''_{\alpha\beta} - z''_{\alpha\beta} = 0,$$
$$\mathrm{D}'' = p x''_{\beta^2} + q y''_{\beta^2} - z''_{\beta^2} = - u''_{\beta^2} x.$$

L'équation demandée est

$$u''_{\alpha^2}\,d\alpha^2 - u''_{\beta^2}\,d\beta^2 = 0.$$

Le coefficient de $d\alpha\,d\beta$ est nul, donc les $\alpha =$ const., $\beta =$ const. sont conjuguées sur S.

L'équation du plan tangent nous permet de voir que ce plan passe par le point fixe $(0, 0, \alpha)$; ce point est le sommet du cône, le lieu est l'axe des z.

2° Dérivons trois fois le premier membre de l'équation du plan tangent

$$(u - \beta u'_\alpha)X + u'_\beta Y - Z + \alpha = 0,$$

on a

$$(u'_\alpha - \beta u''_{\alpha\beta})X + u''_{\alpha\beta} Y + 1 = 0,$$
$$(u''_{\alpha^2} - \beta u'''_{\alpha^2\beta})X + u'''_{\alpha^2\beta} Y = 0,$$
$$(u'''_{\alpha^3} - \beta u^{\text{iv}}_{\alpha^3\beta})X + u^{\text{iv}}_{\alpha^3\beta} Y = 0.$$

Les deux dernières équations doivent être identiques:

$$\frac{u'''_{\alpha^3}}{u''_{\alpha^2}} = \frac{u^{\text{iv}}_{\alpha^3\beta}}{u'''_{\alpha^2\beta}}.$$

Intégrons, on a d'abord

$$u = M u'_\beta + \alpha N + P.$$

M, N et P étant des fonctions quelconques de β seule.

Pour achever l'intégration, posons

$$u = v K + \alpha B_1 + B_2,$$

K étant une fonction de β.

L'équation différentielle devient

$$v(K - MK') = v'_\beta MK$$

en posant

$$B_1 = MB'_1 + N,$$
$$B_2 = MB'_2 + P.$$

et

$$\log v = \int \frac{K - MK'}{MK} d\beta + \log A,$$

le produit $v\frac{1}{A}$ est une fonction $\frac{B}{K}$ de β seule; donc

$$u = AB + \alpha B_1 + B_2.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante; l'équation du plan tangent devient

$$[AB + \alpha B_1 + B_2 - \beta(AB' + \alpha B'_1 + B'_2)]X$$
$$+ (AB' + \alpha B'_1 + B'_2)Y - Z + \alpha = 0.$$

Ce plan passe le point fixe

$$(B - \beta B')X + B'Y = 0,$$
$$(B_1 - \beta B'_1)X + B'_1 Y - 1 = 0,$$
$$(B_2 - \beta B'_2)X + B'_2 Y - Z = 0.$$

Lorsque

$$u = AB + \alpha B_1 + B_2,$$
$$u'_\beta = AB' + \alpha B'_1 + B'_2.$$

L'équation différentielle linéaire est

$$(u - \alpha B_1 - B_2)B' - (u'_\beta - \alpha B'_1 - B'_2)B = 0.$$

où

$$u = p + q\frac{y}{x}, \qquad \beta = \frac{y}{x}, \qquad u'_\beta = q, \qquad \alpha = z - px - py$$

la substitution donne une équation de la forme

$$Pp + Qq = R.$$

Les équations d'une caractéristique sont

$$\frac{y}{x} = \beta \qquad \text{et} \qquad z - px - qy = \alpha,$$

où p et q sont des fonctions de $\frac{y}{x}$ et du paramètre α: A étant une fonction quelconque donnée de α.

Les surfaces intégrales sont les surfaces S, et les équations qui définissent le sommet du cône relatif à une ligne $\beta =$ const. sont indépendantes de α et de Λ.

3° Les équations de la droite D étant

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 \quad &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 0 \end{aligned} \qquad (c_1 c_2 \neq 0),$$

le système formé par ces deux équations et les trois équations précédentes, définissant le sommet du cône, doivent avoir une solution; donc

$$a_1 B' + b_1 (B - \beta B') + c_1 (BB'_1 - B_1 B') = 0,$$
$$a_2 B' + b_2 (B - \beta B') + c_2 (BB'_2 - B_2 B') = 0.$$

La fonction B étant quelconque, mais donnée,

$$\frac{BB'_1 - B_1 B'}{B^2} = f(\beta).$$

Intégrons

$$B_1 = F_1(\beta) + B \times \text{const.},$$

de même

$$B_2 = F_2(\beta) + B \times \text{const.};$$

donc

$$u = (\Lambda - \alpha \times \text{const.} + \text{const.})B + \alpha F_1(\beta) + F_2(\beta).$$

Posons

$$B_1 = h_1 \beta + k_1,$$
$$B_2 = h_2 \beta + k_2.$$

Les deux équations différentielles deviennent

$$B(h_1 c_1 - b_1) + B'[\beta(b_1 - h_1 c_1) + a_1 - k_1 c_1] = 0,$$
$$B(h_2 c_2 - b_2) + B'[\beta(b_2 - h_2 c_2) + b_2 - k_2 c_2] = 0.$$

Ces deux équations sont satisfaites quelle que soit B, si

$$h_1 = \frac{b_1}{c_1}, \qquad k_1 = \frac{a_1}{c_1}, \qquad h_2 = \frac{b_2}{c_2}, \qquad k_2 = \frac{a_2}{c_2}.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est dans ce cas

$$A''B\,d\alpha^2 - AB''\,d\beta^2 = 0.$$

Les variables sont séparées

$$\int\sqrt{\frac{A''}{A}}\,d\alpha = \pm\int\sqrt{\frac{B''}{B}}\,d\beta.$$

En rapportant ces surfaces à de nouvelles coordonnées ayant pour axe des z la droite D, le lieu des sommets des cônes relatifs aux lignes $\alpha =$ const. sera le nouvel axe des z, c'est-à-dire la droite D, et l'autre lieu sera l'ancien axe des z. D'après le théorème de Königs, les plans passant par la droite D et les cônes circonscrits ayant leurs sommets sur cette droite déterminent également deux réseaux de lignes conjuguées; donc les courbes $\alpha =$ const. sont situées dans des plans passant par la droite D : il est facile de le vérifier en éliminant B et β entre les expressions des coordonnées qui suivent, on a

$$\frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z}{a_1 x + b_1 y + c_1} = f(\alpha).$$

Les équations de l'axe des z primitifs dans ce nouveau système d'axes étant

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0,$$
$$a_4 x + b_4 y + c_4 z = 0.$$

Cette réciprocité nous montre que, dans le nouveau système d'axes, les expressions des coordonnées seraient de la même forme que dans l'ancien système après avoir permuté α et β puis remplacé les coefficients $a_1, \ldots, c_2$ par $a_3, \ldots, c_4$.

On obtiendra les expressions des coordonnées d'un

point d'une surface du deuxième groupe en remplaçant les coefficients $a_1, \ldots, c_2$ par $a_3, \ldots, c_4$.

Rendons homogènes les coordonnées, on a pour les deux groupes de surfaces

$$\begin{aligned} \rho_1 x &= -1, \\ \rho_1 y &= -\beta, \\ \rho_1 z &= \alpha A'B - AB + \rho_1(h_2 y + k_2 x), \\ \rho_1 t &= A'B - \rho_1(h_1 y + k_1 x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 x &= -1, \\ \rho_2 y &= -\beta, \\ \rho_2 z &= \alpha A'B - AB + \rho_2(h_4 y + k_4 x), \\ \rho_2 t &= A'B - \rho_2(h_3 y + k_3 x). \end{aligned}$$

L'un des groupes se déduit de l'autre par la transformation homographique

$$\begin{gathered} x = X, \qquad y = Y, \\ z - h_2 y - k_2 x = Z - h_4 Y - k_4 X, \\ t + h_1 y + k_1 x = T + h_3 Y + k_3 X. \end{gathered}$$

D'ailleurs, la transformation homographique

$$\begin{aligned} x &= -X, \\ y &= -Y, \\ z - h_2 y - k_2 x &= \quad Z, \\ t + h_1 y + k_1 x &= \quad T \end{aligned}$$

ramène l'équation d'une surface du premier groupe à la forme plus simple

$$\begin{aligned} \rho x &= 1, \\ \rho y &= \beta, \\ \rho z &= \alpha A'B - AB, \\ \rho t &= A'B \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{A'B}, \\ y &= \frac{\beta}{A'B}, \\ z &= \alpha - \frac{A}{A'}. \end{aligned}$$

z est une fonction de α seule; donc l'équation d'une

surface est de la forme

$$x = f(z)\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

f et φ étant des fonctions quelconques.

CORRESPONDANCE.

M. Hilaire. — *A propos des deux articles de M. Bricard sur la Géométrie de direction* (avril et octobre 1906, p. 159 et 433).

Au début de son premier article, l'auteur se demande si Laguerre n'a pas été conduit à la Géométrie de direction par des considérations de Géométrie dans l'espace.

Le fait est certain ; dans une Notice écrite pour le *Journal de l'École Polytechnique* et reproduite par les *Nouvelles Annales* (1887, p. 105), M. Rouché explique d'une façon très nette comment *Laguerre a puisé dans la Géométrie de la sphère l'idée de sa théorie des cycles* (§ VI, p. 145 et suiv.).

La phrase qui termine le paragraphe VI (p. 148) résume la Note rappelée par M. Bricard au début de son second article.

Dans le premier article je relève une faute d'impression [1].

M. Hilaire. — *Sur le problème de Mathématiques élémentaires proposé au dernier concours d'Agrégation* (septembre 1906, solution de M. Clapier, p. 411).

Le lieu demandé par la première partie de l'énoncé s'obtient de suite par l'application du théorème très général que voici (*voir*, par exemple, un article de M. de Saint-Germain, *N. A.*, 1884, p. 37 et 38) :

Soient n points, A, B, C, ..., L *affectés chacun d'un coefficient spécial* α, β, γ, ..., λ ; *si l'on désigne par* σ *la somme* $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda$ *et par* T *le centre des distances*

(1) *Voir* les Errata.

proportionnelles relatif aux n points et aux n coefficients donnés, on a

$$\overline{MT}^2 = \frac{\sigma\Sigma\alpha\overline{MA}^2 - \Sigma\alpha\beta\overline{AB}^2}{\sigma^2}.$$

Ce théorème pouvait être connu des candidats, car il figure aujourd'hui, sous une forme un peu différente, il est vrai, dans les traités de Géométrie (*voir*, par exemple, le Traité de M. Guichard, t. II, Compléments, p. 179, où le théorème est attribué à Leibniz).

On a, en conservant les mêmes notations,

$$\overline{MT}^2 = \frac{\Sigma\alpha\overline{MA}^2 - \Sigma\alpha\overline{TA}^2}{\sigma}.$$

Sur chacune des deux formes on voit que, $\Sigma\alpha\overline{MA}^2$ étant constant, MT l'est aussi : donc le lieu des points M_1 tels que $\alpha\Sigma\overline{MA}^2$ est constant est un cercle (ou une sphère, si le point M n'est pas assujetti à rester dans un même plan), dont le centre est le point T et dont le rayon est aussi en évidence.

La première forme convient mieux au problème d'agrégation, parce qu'elle donne immédiatement le rayon du cercle en fonction des côtés du triangle ABC. On peut constater de la sorte que le rayon est *nul* pour le cercle correspondant à la combinaison des trois signes +. M. Clapier, qui appelle ce cercle S′, n'a pas signalé cette particularité.

En résumé, sur les huit cercles formant le lieu complet, seuls les trois premiers S_A, S_B, S_C sont des cercles proprement dits, le quatrième S′ se réduit à un point, les quatre derniers sont imaginaires.

BIBLIOGRAPHIE.

Mélanges de Géométrie a quatre dimensions; par *E. Jouffret*. — 1 vol. grand in-8 de XI-227 pages, av. 49 figures. Prix : 7^fr^,50. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

Cet Ouvrage posthume du colonel E. Jouffret fait suite au *Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions*,

paru en 1903 et dont j'ai rendu compte ici même (¹). Son but principal est de montrer, par des applications diverses, quel secours la Géométrie de l'espace et même la Géométrie plane peuvent tirer de la considération de figures à quatre dimensions.

Ce Livre est plus riche en résultats mathématiques que son prédécesseur; il est aussi plus rempli d'idées personnelles que ne le laisserait croire un premier examen : il semblerait, à voir le nombre des citations et des références, que l'auteur a simplement dépouillé beaucoup de Mémoires et s'est contenté d'en transcrire les résultats principaux. Mais le colonel Jouffret était de ces savants modestes et peu communs qui s'effacent par prédilection et qui rougiraient presque qu'on les soupçonnât d'inventer. A regarder les choses de plus près, on se rend compte de l'effort qu'a demandé la coordination de travaux souvent très ardus, écrits à des points de vue très différents les uns des autres; on est frappé de l'originalité de l'exposition; on se trouve, en un mot, en présence non d'une compilation mais d'une œuvre personnelle.

Dans les deux premiers Chapitres, l'auteur revient sur les principes de la Géométrie à quatre dimensions et sur les trois premiers polyédroïdes, qu'il étudie plus à fond que dans le *Traité élémentaire*.

Les trois Chapitres suivants constituent la partie la plus intéressante, à mon avis, de l'Ouvrage. Ils sont consacrés à l'hexagramme de Pascal, considéré d'abord en lui-même, puis dans ses relations avec la surface du troisième ordre, et enfin dans ses relations avec la figure à quatre dimensions que les géomètres anglais ont nommée *hexastigme*. On est frappé de voir, à mesure que le *champ* s'élève, les nombreuses propriétés de l'hexagramme se grouper peu à peu en conséquences simples de propriétés presque intuitives de l'hexastigme : l'auteur ne pouvait choisir de meilleur exemple à l'appui de sa thèse. Notons en passant que les trois Chapitres dont il s'agit contiennent une foule de renseignements sur la surface de troisième ordre, sur ses 27 droites, sur d'autres surfaces, etc...

Les deux Chapitres suivants traitent des hyperquadriques et

(¹) 1903, p. 220.

de leurs intersections avec de nouvelles applications à la Géométrie de l'espace.

Le dernier Chapitre enfin contient des développements philosophiques sur la question de l'objectivité de l'espace à quatre dimensions, sur la possibilité de son application à l'intelligence du monde où nous vivons. De telles spéculations conduisent nécessairement à l'examen de certains phénomènes dont la réalité est affirmée par les spirites. L'auteur présente les arguments de Zollner avec la même conscience et la même impartialité qu'il a étudié l'hexastigme.... Avec trop d'impartialité, dirai-je presque, car on aurait aimé connaître ici la pensée intime de l'auteur.

Les 49 figures de l'Ouvrage, dont quelques-unes sont plus compliquées encore que celles du *Traité élémentaire*, ont été exécutées avec la même perfection. R. B.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Trajectoires orthogonales des strophoïdes*

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0,$$

a étant arbitraire. Construire une de ces trajectoires [*l'équation d'une trajectoire est* $r^2 = C^3 \sin\theta(1 + 2\cos^2\theta)$].

II. *Etant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY, *on considère un point* A, *de masse* 1, *assujetti à glisser sur* OX, *et un point* B, *de masse* 8, *libre de se mouvoir dans le plan* OXY. *Les deux points s'attirent avec une force égale à* 8AB : *à l'instant initial ils sont au repos,* A *à l'origine,* B *en un point* $x_0 = y_0 = 9$. *Mouvement du système : construire la trajectoire en* B.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *sur la parabole*

$$z = 0, \qquad x^2 - 2y = 0,$$

on prend un point quelconque M, *par lequel on mène* MP *parallèle à* OZ *et égale au double de l'aire comprise entre l'arc* OM *et sa corde : rectifier la courbe lieu des points* P. *Calculer l'aire cylindrique* ω *engendrée par les droites* MP *et comprise entre les arcs* OM, OP *et la droite* MP. *En prenant le mètre pour unité de longueur et supposant l'abscisse des points* M, P *égale à* 2, *calculer* ω *à moins de* 1^{cm^2}.

$$ds = \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)dx,$$

$$\omega = \frac{1}{45} + \frac{3x^2 - 2}{90}(1 + x^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\omega_1 = 1^{\mathrm{m}^2},2645.$$

(Novembre 1906.)

Grenoble.

Composition. — 1° *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = x - y - t - 2,$$

$$\frac{dy}{dt} = y + t.$$

2° *Déterminer une solution particulière telle que, pour* $t = 0$, *on ait* $x = 0$, $y = 0$. *Construire pour cette solution particulière la courbe que décrit le point de coordonnées* x, y *quand* t *varie.*

3° *Déterminer :* 1° *l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des* x *et la droite* $x = 1$; 2° *l'aire comprise entre la courbe et la droite* $x = 1$.

4° *Montrer que, par le point* $x = 1$, $y = -1$, *on ne peut mener qu'une tangente à la courbe.*

Épreuve pratique. — I. *Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire limitée par la courbe*

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

l'axe des x *et la droite* $x = t$, *lorsque* t *est compris entre* 0 *et* 1.

Cas particuliers où $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Que deviennent les formules lorsque t tend vers 1?

II. *Montrer que l'équation*

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}$$

n'a qu'une racine. La calculer par approximations.

(Novembre 1906.)

Lille.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Épreuve écrite. — 1. *a et b désignant deux longueurs données* ($a > b$), *et* Ox, Oy, Oz *étant trois axes rectangulaires, les équations*

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

représentent une ellipse située dans le plan xOy : *trouver et construire la courbe* (Γ) *lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes à l'ellipse, former l'équation de* (Γ) *en coordonnées polaires.*

2. *Calculer l'aire de la portion de plan située à l'intérieur de* (Γ).

3. *La courbe* (Γ) *est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à* Oz, *construire la projection sur le plan* xOz *de l'intersection de ce cylindre avec une sphère de centre* O *et de rayon a.*

4. *Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par ce cylindre et la sphère qui viennent d'être définis.*

5. *a et b variant de telle sorte que la différence* $a^2 - b^2$ *conserve une valeur constante donnée,* (Γ) *engendre une famille de courbes; former et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de ces courbes.*

MÉCANIQUE.

I. *Pendule simple dans le vide.*

II. *Un voyageur, qui se trouve dans un wagon en marche, abandonne librement à lui-même, sans vitesse relative, un point matériel pesant en un point situé sur la verticale médiane du wagon, à* 2^{m} *au-dessus du plancher. On demande d'étudier le mouvement relatif de ce point pesant, par rapport au wagon, dans les deux cas suivants :*

1° *Le wagon a un mouvement uniformément accéléré; son accélération est de* $0^{\text{m}},50$ *par seconde, et sa vitesse est de* 40^{km} *à l'heure, à l'instant même où on lâche le point pesant.*

2° *Le wagon se meut avec une vitesse constante de* 30^{km} *à l'heure sur un cercle de* 80^{m} *de rayon.*

(Novembre 1906.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Quantités imaginaires. Représentation trigonométrique et exponentielle. Formule de Moivre.*

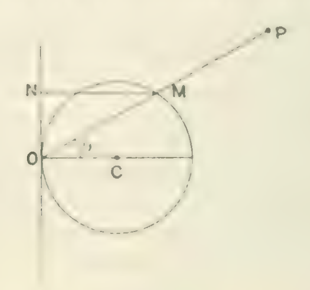
Mettre log nép $(x+yi)$ *sous la forme* $\text{X}+i\text{Y}$, *et vérifier que* X *et* Y *sont des fonctions de* x *et* y *vérifiant l'équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 \text{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \text{U}}{\partial y^2}=0.$$

Partant ensuite du développement de $\log(1+z)$ *en série de Taylor, on y remplacera* z *par* $r(\cos\theta+i\sin\theta)$, *et l'on séparera dans les deux membres la partie réelle de la partie purement imaginaire, ce qui donnera deux développements remarquables. Ces développements sont-ils valables pour toutes les valeurs de* r *et de* θ.

On fixera ensuite son attention sur celui de ces développements qui ne contient que des sinus, et l'on montrera que pour $r=1$ *il représente* $\frac{\theta}{2}$, *et l'on se proposera de retrouver directement ce développement en développant* $\frac{\theta}{2}$ *en série trigonométrique.*

Épreuve pratique. — *On considère un cercle* C *et une tangente* ON *fixes. Par* O *on mène un rayon vecteur* OM *et l'on projette* M *en* N *sur la tangente fixe. On prolonge*



OM *de* MP = MN. *Lieu de* P.

Lorsque θ *varie de* 0° *à* 90°, *la courbe* (P) *enferme au-dessus de l'axe* OC *une aire que l'on demande d'évaluer.*

(Novembre 1906.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *L'équation d'une droite, rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *est*

$$y = tx + t^3,$$

où t *désigne un paramètre variable.*

Construire l'enveloppe K *de cette droite.*

Calculer la longueur d'un arc OM *de la courbe* k, *le rayon de courbure au point* M.

A *désignant le point de la courbe où le coefficient angulaire de la tangente est égal à* un, *calculer l'aire limitée par l'arc* OA *et par les tangentes aux extrémités de cet arc.*

Supposant ensuite que t *désigne le temps, le point de contact de la droite mobile a un certain mouvement sur sa trajectoire* K.

Trouver, à un instant quelconque, la vitesse, l'accélération normale de ce mouvement, et calculer l'énergie cinétique du point à l'instant où il passe en A, *en supposant la masse du point égale à* $\frac{1}{3}$.

II. *Trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}\sin t + 4e^t.$$

Épreuve pratique. — 1° *Calculer la quantité φ déterminée par la formule*

$$\varphi = 1{,}0565\,\mathrm{L}\,\frac{t}{273} - 9 \times 10^{-7}\left(\frac{t^2}{2} - 503\,t\right) + 0{,}0902$$

pour $t = 326$.

2° *Calculer φ par la formule approchée*

$$\varphi = \mathrm{L}\,\frac{t}{273}$$

pour la même valeur de la variable t.

3° *Trouver l'erreur relative commise en substituant la formule approchée à la formule exacte.*

Note. — *Dans les formules ci-dessus, la notation* L*a indique le logarithme népérien de* a.

(Novembre 1906.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Caen.

Épreuve écrite. — I. *Un point* M, *de masse* 1, *est assujetti à rester sur la surface* S *définie par les équations*

$$x = u\cos\psi, \qquad y = u\sin\psi, \qquad z = m\psi;$$

il est attiré vers l'axe des z par une force $\dfrac{m^2\omega^2}{u^3}$; à l'instant initial, on a

$$u = m, \qquad \psi = 0, \qquad \frac{du}{dt} = \frac{m\omega}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{2}.$$

Déterminer le mouvement de M *et sa pression sur* S.

SOLUTION.

$$(u^2 + m^2)\frac{d\psi}{dt} = m^2\omega, \qquad \frac{du}{dt} = \frac{m^3\omega}{u\sqrt{u^2 + m^2}},$$

$$N = \frac{2m^6\omega^2}{u(u^2 + m^2)^2}.$$

II. *Une plaque très mince, homogène, soustraite à l'action de toute force extérieure, a la forme d'un triangle isoscèle* OAB *dont la hauteur* OH, *bissectrice de l'angle* O, *est égale à* h *et la base* AB *à* $h\sqrt{6}$. *La plaque peut tourner autour du sommet* O *qui est fixe.*

Déterminer son mouvement en supposant qu'à l'instant initial elle est animée d'une rotation 2ω *autour d'un axe qui se projette sur* OAB *suivant* OH *et fait avec cette droite un angle de* 30°.

SOLUTION.

Les moments principaux relatifs au point O sont proportionnels à 1, 2, 3 et l'on est dans le cas simple du mouvement de Poinsot (B = D).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, à* 0^s,001 *près, le temps que met un point pesant pour parcourir une circonférence de* 1^m *de rayon située dans un plan vertical. La vitesse au point le plus haut est* $2\sqrt{g}$ ($g = 9^m,809$). *On demande la vitesse au point le plus bas du cercle.*

(Juillet 1906.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un losange articulé, pesant,* OABA', *est constitué par quatre tiges de même masse* M, *de même longueur* l. *L'un des sommets* O *du losange est fixe; le sommet opposé* B *décrit la verticale descendante* Oz_1 *du point* O. *Les liaisons sont sans frottement.*

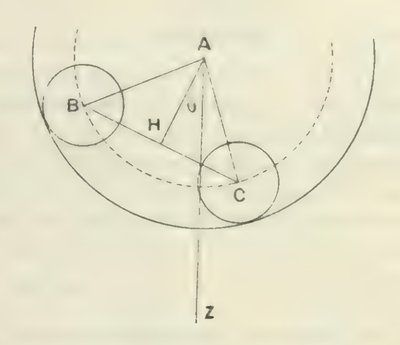
On désigne par 2θ *l'angle* AOA' *du losange, par* ψ *l'angle que fait le plan du losange avec un plan vertical fixe* x_1Oz_1.

1° *Déterminer le mouvement du système et discuter, dans le cas particulier où la dérivée de θ par rapport au temps est nulle à l'instant initial.*

2° *On considère un second système identique au précédent, assujetti aux mêmes liaisons et, en plus, à une liaison nouvelle obligeant le plan du losange à tourner uniformément autour de* Oz_1. *Déterminer le mouvement du système.*

(La discussion n'est pas demandée pour cette dernière question.)

Épreuve pratique. — *Une plaque homogène d'épaisseur négligeable a la forme d'un triangle équilatéral* ABC *de côté* a. *Ce triangle est pesant et se trouve assujetti à*



se mouvoir dans un plan vertical fixe. En B *et* C *sont implantés, normalement au plan du triangle, deux clous de masses et de dimensions négligeables. Chacun de ces clous est l'axe de deux roues planes infiniment minces, circulaires, pesantes, qui lui sont normales et qui sont équidistantes du plan du triangle.*

Les quatre roues ont même masse m *et même rayon* r. *Elles s'appuient sur la surface intérieure d'un cylindre circulaire droit de rayon* $a+r$ *dont les génératrices sont normales au plan de la plaque; elles ne peuvent que rouler sans glisser sur les cylindres. Les liaisons sont sans frottement.*

Soient AH *la hauteur de* ABC *issue de* A, θ *l'angle*

de AB *avec la verticale descendante* Az, θ' *la dérivée de* θ *par rapport au temps t.*

On demande : 1° *De trouver le moment d'inertie* I_A *du triangle* ABC *relativement à son sommet* A;

2° *De calculer (pour des valeurs de* θ *et* θ' *supposées connues) les vitesses angulaires des roues par rapport à des axes de directions fixes;*

3° *D'écrire l'équation du mouvement du système, de déterminer la durée des oscillations infiniment petites autour de la position d'équilibre stable;*

4° *De calculer les réactions exercées par les clous sur la plaque* ABC. *On admet que ces réactions sont dans le plan de la plaque, normales au cercle décrit par les points* B *et* C.

(Juillet 1906.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Mouvement d'un cône solide, homogène et pesant, dont le sommet est assujetti à se déplacer sans frottement sur un plan fixe incliné sur l'horizon.*

2° *Étudier en détail le mouvement et, en particulier, reconnaître si le cône vient toucher le plan fixe, dans les hypothèses suivantes : le rayon de base du cône est égal à* 1, *la hauteur est égale à* 2, *le cosinus de l'angle du plan fixe avec l'horizon est égal à* $\frac{3}{155}$. *A l'origine du mouvement, l'axe du cône est immobile et perpendiculaire au plan fixe; le cône est animé d'une rotation donnée autour de son axe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Distribution des vitesses dans un solide en mouvement.*

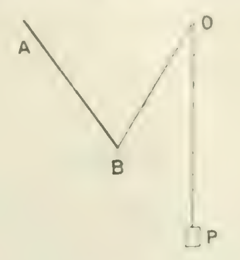
Quel est, à un instant donné, le lieu des points du solide dont les vitesses concourent en un point donné?

(Juillet 1906.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une barre rigide* AB, *homogène et pesante, peut tourner librement autour de son extrémité* A. *A l'autre extrémité* B *s'attache un fil flexible inextensible*

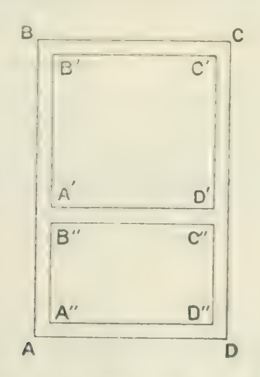
et de masse négligeable BOP, *qui vient passer en* O *dans un anneau très petit, et retombe ensuite verticalement, supportant un poids* P. *Tous les éléments restent dans un*



même plan vertical; les points fixes A *et* O *sont sur une même horizontale, la distance* AO *est égale à la longueur de la barre; il n'y a pas de frottement.*

Déterminer les positions d'équilibre et étudier les mouvements possibles du système, en particulier les petits mouvements. Calculer les réactions.

Épreuve pratique. — *Centre de percussion d'un rectangle mobile autour d'un de ses côtés* AB.



Le rectangle considéré comprend un châssis formé d'un cadre et d'une traverse, qui limitent deux panneaux A′B′C′D′, A″B″C″D″.

Le cadre et la traverse ont la même densité ρ; *les panneaux ont la densité* $\rho' = \frac{2}{3}\rho$.

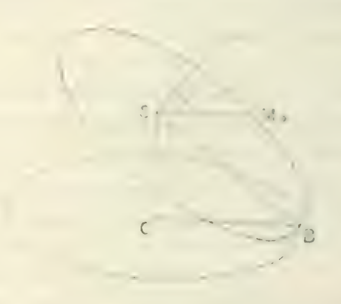
Dimensions :

$$AB = 1^m,10, \qquad BC = 0^m,80,$$
$$A'B = 1^m, \qquad B'C' = 0^m,60,$$
$$B'A' = 0^m,10 \qquad A''B'' = 0^m,80.$$

Largeur du cadre : $0^m,10$. (Juillet 1906.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — *On donne un cône circulaire droit dont la base repose sur un plan horizontal, dont l'axe SO est vertical et qui est absolument fixe.*



Une roue circulaire dont le rayon est égal à la génératrice SB du cône porte à sa circonférence un canal annulaire de très petite section, dans l'intérieur duquel on a introduit une sphère homogène pesante de masse m, d'un très petit diamètre égal à celui du canal et qui peut glisser sans frottement dans ce canal.

Le centre de la roue s'appuie sur le sommet S du cône fixe; elle est assujettie à rouler d'un mouvement uniforme sur le cône, son plan restant constamment tangent au cône, de sorte que les rayons de la roue viennent s'appliquer sur les génératrices du cône et les points de la circonférence de la roue sur les points de la circonférence de la base du cône.

On demande d'étudier le mouvement relatif de la sphère dans le canal.

Données : α *l'angle au sommet du cône;* ω *la vitesse an-*

gulaire de rotation constante du plan de la roue autour de chaque génératrice du cône; R le rayon de la roue; m la masse de la petite sphère mobile; φ_0 l'angle formé par le rayon SM_0 de la roue avec l'horizontale Sx à l'instant initial.

On supposera nulle la vitesse initiale relative.

Épreuve pratique. — *La densité δ en tout point d'une sphère de rayon égal à l'unité suit la loi*

$$\delta = \frac{3}{2} e^{-r}, \qquad e = 2,71828,$$

r désignant la distance du point au centre.

On demande :

1° *La masse totale de la sphère;*

2° *Le moment d'inertie de la sphère autour d'un de ses diamètres;*

3° *En supposant cette sphère animée d'un mouvement de translation uniforme de $\frac{1}{200}$ d'unité de longueur par seconde et d'un mouvement de rotation autour d'un de ses diamètres de un tour en 24 heures, de calculer la distance au centre de la percussion capable de lui communiquer ce double mouvement.* (Juillet 1906.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1967.

(1903, p. 144.)

Soient AIB *une corde d'un cercle,* AJB *un des arcs soustendus,* I *et* J *étant les points milieux;* M *étant un point quelconque de la corde* AB, *élevons par ce point une perpendiculaire sur cette corde; elle va rencontrer une des cordes* AJ *ou* JB *en un point* M_1, AJ *si* $\frac{AM}{AB} < \frac{1}{2}$, *et* JB *si* $\frac{AM}{AB} > \frac{1}{2}$. *Procédant sur la corde qui comprend* M_1

comme tantôt sur AB *et* M, *on obtient un point* M_2. *On obtient ainsi une suite de points* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *qui ont pour limite un point de l'arc* AJB, *le partageant dans le rapport* $\frac{AM}{AB}$. *On demande les coordonnées du point* M_n.

A. Pellet.

SOLUTION

Par M. Lethierce.

Supposons $\frac{AM}{AB} < \frac{1}{2}$; O étant le centre du cercle, prenons pour axe des x le diamètre OA, pour axe des y le diamètre perpendiculaire, et soit $\alpha =$ arc AJB. Nous définirons un point quelconque C de la circonférence par l'angle de OC avec Ox.

Le rapport $\lambda = \frac{AM}{AB}$ peut se mettre sous la forme

$$\lambda = \frac{1}{2^{n_1}} - \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2^{n_1+n_2+\ldots+n_k}} + \ldots,$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ sont des entiers égaux ou supérieurs à 1, et, pour la commodité de l'écriture, posons

$$\lambda_k = \frac{1}{2^{s_1}} - \frac{1}{2^{s_2}} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2^{s_k}}$$

avec

$$s_k = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Les s_1 premiers points $M_1, M_2, \ldots, M_{s_1}$ sont sur les droites

$$AJ, \quad AJ_1, \quad \ldots, \quad AJ_{s_1-1},$$

issues de A; les rapports

$$\frac{AM_1}{AJ}, \quad \frac{AM_2}{AJ_1}, \quad \ldots, \quad \frac{AM_{s_1}}{AJ_{s_1-1}}$$

sont égaux respectivement à

$$2\lambda, \quad 2^2\lambda, \quad \ldots, \quad 2^{s_1}\lambda,$$

tous inférieurs à $\frac{1}{2}$, sauf le dernier, et les points $J, J_1, \ldots,$

J_{s_1-1} sont définis par les angles

$$\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\alpha}{2^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha}{2^{s_1}}.$$

Les n_2 points suivants M_{s_1+1}, M_{s_1+2}, $\ldots$, M_{s_2} sont sur les droites $J_{s_1-1}J_{s_1}$, $J_{s_1-1}J_{s_1+1}$, $\ldots$, $J_{s_1-1}J_{s_2-1}$ issues de J_{s_1-1} ; les rapports analogues à $\frac{AM}{AB}$ sont

$$2^{s_1+1}(\lambda_1-\lambda), \quad 2^{s_1+2}(\lambda_1-\lambda), \quad \ldots, \quad 2^{s_2}(\lambda_1-\lambda),$$

et les points J_{s_1}, J_{s_1+1}, $\ldots$, J_{s_2-1} sont définis par les angles

$$\alpha\lambda_1\left(1-\frac{1}{2}\right), \quad \alpha\lambda_1\left(1-\frac{1}{2^2}\right), \quad \ldots, \quad \alpha\lambda_2.$$

D'une façon générale, si $n = s_k + m$, avec $0 \leqq m < n_{k+1}$, on voit aisément que le point M_n est sur la corde $(J_{s_k-1}J_{s_k+m-1})$ dont les extrémités sont définies par les angles $\alpha\lambda_k$ et $\alpha\left(\lambda_k+\frac{(-1)^k}{2^n}\right)$, et que l'on a

$$\frac{J_{s_k-1}M_n}{J_{s_k-1}J_{s_k+m-1}} = (-1)^k 2^n(\lambda-\lambda_k).$$

Cela étant, en prenant pour unité le rayon du cercle, les coordonnées du point M_n sont :

$$x = \cos\alpha\lambda_k + (-1)^k 2^n(\lambda-\lambda_k)\left\{\cos\alpha\left[\lambda_k+\frac{(-1)^k}{2^n}\right]-\cos\alpha\lambda_k\right\},$$

$$y = \sin\alpha\lambda_k + (-1)^k 2^n(\lambda-\lambda_k)\left\{\sin\alpha\left[\lambda_k+\frac{(-1)^k}{2^n}\right]-\sin\alpha\lambda_k\right\},$$

qui peuvent s'écrire

$$x = \cos\alpha\lambda_k + (-1)^{k+1} 2^{n+1}(\lambda-\lambda_k)\sin\alpha\left[\lambda_k+\frac{(-1)^k}{2^{n+1}}\right]\sin\frac{(-1)^k\alpha}{2^{n+1}},$$

$$y = \sin\alpha\lambda_k + (-1)^k 2^{n+1}(\lambda-\lambda_k)\cos\alpha\left[\lambda_k+\frac{(-1)^k}{2^{n+1}}\right]\sin\frac{(-1)^k\alpha}{2^{n+1}}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, le produit $2^{n+1}(\lambda-\lambda_k)$ reste toujours en valeur absolue inférieur à 2, $\sin\frac{(-1)^k\alpha}{2^{n+1}}$ tend

vers α, et la limite de M_1 est le point de coordonnées

$$\cos 2\lambda, \quad \sin 2\lambda,$$

qui satisfait bien aux conditions de l'énoncé.

Si $\frac{AM}{AB} > \frac{1}{2}$, on considérera le rapport $\frac{BM}{BA} < \frac{1}{2}$ et l'on prendra OB pour axe des x.

2006.

(1905, p. 48.)

Soit m un nombre impair positif quelconque. Formons la suite

$$[\sqrt{m}], [\sqrt{2m}], \dots, [\sqrt{(m-1)m}],$$

en désignant, suivant l'usage, par $[x]$ le nombre entier défini par

$$x - 1 < [x] \leqq x.$$

1° *Dans la suite ainsi obtenue il ne peut y avoir plus de deux termes égaux;*

2° *La même suite, au contraire, contient des couples de termes égaux, et le nombre de ces couples est $\left[\frac{m}{4}\right]$.*

Exemple. — *Pour $m = 9$, la suite est la suivante :*

$$3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8,$$

et elle contient $2 = \left[\frac{9}{4}\right]$ couples de termes égaux.

(R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

1° S'il y avait trois termes égaux, ils seraient consécutifs; on aurait

$$a^2 \leqq hm < (a+1)^2,$$

$$a^2 \leqq (h+2)m < (a+1)^2,$$

donc

$$2m < 2a+1,$$

or

$$a < m - 1;$$

c'est donc impossible.

2° Cette suite renferme des termes égaux, car le nombre des termes est supérieur à la différence des extrêmes plus 1

$$m - [\sqrt{m}].$$

Il y a donc au moins $[\sqrt{m}] - 1$ couples de termes égaux. A deux termes égaux correspondent les inégalités

$$a^2 < hm < (a+1)^2,$$

$$a^2 < (h+1)m < (a+1)^2,$$

donc

$$m < 2a + 1, \qquad a > \frac{m-1}{2}.$$

Or

$$\frac{m-1}{2} = \left[\sqrt{\frac{m-1}{4} \cdot m}\right];$$

par suite pour ces termes

$$h > \left[\frac{m}{4}\right].$$

La différence de deux termes consécutifs peut être supérieure à 1 : on aurait alors, par exemple,

$$a^2 < hm < (a+1)^2,$$

$$(a+2)^2 < (h+1)m < (a+3)^2,$$

donc

$$m > 2a + 3, \qquad a < \frac{m-3}{2}$$

et

$$h < \left[\frac{m}{4}\right].$$

On a ainsi partagé la suite en deux : la différence des extrêmes de la première est $\frac{m-1}{2} - [\sqrt{m}] + 1$, le nombre des termes est $\left[\frac{m}{4}\right]$, la différence est le nombre dont il faut augmenter $[\sqrt{m}] - 1$ pour avoir le nombre exact des couples

égaux : on a ainsi

$$\frac{m-1}{2} - \frac{m}{4}$$

ou

$$\left[\frac{m}{2}\right] - \left[\frac{m}{4}\right] = \left[\frac{m}{4}\right].$$

Remarque. — Le théorème est encore exact quand m es pair. Quand m est un multiple de 4, pour $h = \frac{m}{4}$ on a

$$\sqrt{\frac{m}{4} + m} = \frac{m}{2}$$

et

$$\left[\sqrt{\frac{m+4}{4} + m}\right] = \frac{m}{2};$$

ces deux termes sont égaux, mais aucun de ceux qui les précèdent ne sont égaux.

2035.

(1906, p. [illegible])

Soient ABC, A′B′C′ *deux triangles. Si les droites* AA′, BB′, CC′ *rencontrent respectivement les côtés* a, b, c *du premier triangle en trois points situés sur une même droite, les points* (a, a'), (b, b'), (c, c') *se joignent aux sommets* A′, B′, C′ *du second triangle par trois droites concourantes.*

(R. B.)

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

Le triangle ABC étant pris comme triangle de référence, soient

$$ax + a'y + a''z = 0, \qquad bx + b'y + b''z = 0,$$
$$cx + c'y + c''z = 0$$

les équations des côtés du triangle A′B′C′. Si l'on désigne par A, A′, A″, B, B′, ..., les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

affectés des signes qui concernent le développement de ce déterminant, on a pour les coordonnées du point A', par exemple,

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{A'} = \frac{z}{A''},$$

de sorte que la droite AA' rencontre le côté BC ou a en un point dont les coordonnées sont O, A', A''; l'hypothèse de l'énoncé se traduit donc par la condition

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & A' & A'' \\ B & 0 & B'' \\ C & C' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Une droite passant en A' a une équation de la forme

$$\beta(bx + b'y + b''z) + \gamma(cx + c'y + c''z) = 0;$$

elle passe au point (a, a'), si l'équation

$$\alpha(ax + a'y + a''z) \\ + \beta(bx + b'y + b''z) + \gamma(cx + c'y + c''z) = 0$$

peut se réduire à $x = 0$, c'est-à-dire si l'on peut avoir

$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0,$$
$$a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = 0;$$

il faut donc prendre

$$\frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C},$$

et l'équation de la droite considérée est

$$B(bx + b'y + b''z) + C(cx + c'y + c''z) = 0$$

en écrivant que cette droite et les deux droites analogues sont concourantes, on retombe, comme l'on voit, sur la condition (1).

On démontrerait d'une manière toute semblable le théorème suivant : *Soient* ABCD, A'B'C'D' *deux tétraèdres. Si les droites* AA', BB', CC', DD' *rencontrent respectivement les plans a, b, c, d des faces du premier tétraèdre en quatre*

points situés dans un même plan, les droites (a, a'), (b, b'), ... *déterminent avec les sommets* A', B', C', D' *du second tétraèdre quatre plans qui ont un point commun.*

Autres solutions de MM. Painvin, Parrod, Retali, Sicard et Sondat.

NOTE.

Voici une démonstration par la méthode de Grassmann de l'extension à l'espace indiquée par M. Fontené. Une démonstration toute semblable s'appliquerait à la question 2035.

Le point de rencontre de la droite AA' et du plan a ou BCD est donné par le produit régressif

$$AA'.BCD = AA'CD.B + AA'DB.C + AA'BC.D.$$

En écrivant que ce point et les trois points analogues sont dans un même plan, on obtient la condition

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & AA'CD & AA'DB & AA'BC \\ BB'CD & 0 & BB'DA & BB'AC \\ CC'BD & CC'DA & 0 & CC'AB \\ DD'BC & DD'CA & DD'AB & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part la droite (a, a') est donnée par le produit régressif

$$B'C'D'.BCD = B'BCD.C'D' + C'BCD.D'B' + D'BCD.B'C',$$

et le plan passant par cette droite et par le point A' a pour expression

$$\begin{aligned} &B'BCD.C'D'A' + C'BCD.D'B'A' + D'BCD.B'C'A' \\ &\quad = B'BCD.b' + C'BCD.c' + D'BCD.d'. \end{aligned}$$

En écrivant que ce plan et les trois plans analogues passent par un même point, on a

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 0 & B'BCD & C'BCD & D'BCD \\ A'CDA & 0 & C'CDA & D'CDA \\ A'DAB & B'DAB & 0 & D'DAB \\ A'ABC & B'ABC & C'ABC & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on écrit la relation (1)

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & 0 & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & 0 & \delta'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

la relation (2) s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & -\alpha' & \alpha'' & -\alpha''' \\ -\beta & 0 & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & -\gamma' & 0 & -\gamma''' \\ -\delta & \delta' & -\delta'' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

ce qui revient manifestement au même. R. B.

QUESTIONS.

2055. La parabole inscrite dans le quadrilatère formé par les deux axes d'une conique, la tangente et la normale en un point M de cette conique touche, comme l'on sait, la normale au centre de courbure en M. Trouver le lieu du foyer de cette parabole lorsque le point M se déplace sur la conique.

(A. Pellet.)

2056. Trouver le minimum de la plus courte distance des cercles osculateurs aux sommets situés sur le grand axe et le petit axe d'une ellipse, pour les ellipses ayant même cercle de Monge ou même axe. (A. Pellet.)

2057. Si, dans le triangle arithmétique, on multiplie les nombres figurés successifs d'ordre p à partir du premier, par les coefficients successifs du développement de $(x+a)^n$ à partir de C_n^q, et si l'on ajoute les $n-q+1$ produits affectés

alternativement du signe + et du signe —, la somme obtenue est nulle pour $q < p$; et pour $q = p + 1, p + 2, \ldots, n$, ce qui suppose $n > p$, on obtient les coefficients du développement de $(x + a)^{n-p-1}$. G. FONTENÉ.

2058. Dans le triangle ABC, on mène les parallèles Ax, By, Cz à une direction donnée. Démontrer que l'axe d'homologie $\Delta(\lambda\mu\nu)$ du triangle ABC et xyz touche l'ellipse tangente aux milieux des côtés de ABC en un point ω qui est le centre commun à la conique Q inscrite à ABC en x, y, z et à la conique R inscrite en A, B, C au triangle des droites Aλ, Bμ, Cν. (P. SONDAT.)

ERRATA.

Page 171, ligne 11, *au lieu de* : (β), *lire* : (γ).

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME VI, 4e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index
du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

K. — Géométrie et Trigonométrie élémentaires (étude des figures formées de droites, plans, cercles et sphères); géométrie du point, de la droite, du plan, du cercle et de la sphère; géométrie descriptive; perspective.

L. — Coniques et surfaces du second degré.

M. — Courbes et surfaces algébriques, courbes et surfaces transcendantes spéciales.

O. Géométrie infinitésimale et géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes et des surfaces; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques, lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

P. — Transformations géométriques; homographie; homologie et affinité; corrélation et polaires réciproques; inversion; transformations birationnelles et autres.

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Questions de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Divers.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.



TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS

(TOME VI, 4e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

37861 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

